Prof. Dr. Ulrich Felgner Sommersemester 2002

Mathematische Logik

Übungsblatt 11

Definition: Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache der Signatur $\langle \sigma, \tau, I \rangle$.
Seien $\mathfrak{A} = \langle A, f_j, R_k, c_i \rangle_{j \in J, k \in K, i \in I}$ und $\mathfrak{B} = \langle B, g_j, S_k, d_i \rangle_{j \in J, k \in K, i \in I}$ zwei $\mathcal{L}$-Strukturen. Eine bijektive Abbildung φ von A auf B heißt *Isomorphismus von* $\mathfrak{A}$ *auf* $\mathfrak{B}$, falls

(i) für jedes $j \in J$ gilt: $\forall x_0, \ldots, x_{\sigma(j)} \in A$:
$x_0 = f_j(x_1, \ldots, x_{\sigma(j)}) \iff \varphi(x_0) = g_j(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{\sigma(j)}))$,

(ii) für jedes $k \in K$ gilt: $\forall x_1, \ldots, x_{\tau(k)} \in A$:
$\langle x_1 \ldots, x_{\tau(k)} \rangle \in R_k \iff \langle \varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{\tau(k)}) \rangle \in S_k$,

(iii) für jedes $i \in I$ gilt: $\varphi(c_i) = d_i$.

(1) Verifizieren Sie durch Induktion über den Formelaufbau, dass für $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und eine $\mathcal{L}$-Formel φ gilt:

Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{A}$ isomorph zu $\mathfrak{B}$ ist, dann gilt auch $\mathfrak{B} \models \varphi$.

(2 Punkte)

Definition: Eine Theorie T heißt *kategorisch*, wenn je zwei Modelle von T isomorph sind.

(2) Zeigen Sie, dass kategorische Theorien vollständig sind.

(2 Punkte)

(3) Sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 1$ und $\mathcal{L}$ die Sprache mit dem Relationszeichen $\dot{\leq}$ und der Individuenkonstante $\dot{c}$.

Wie viele Vervollständigungen hat die Theorie Σ_n, die aus den Axiomen für lineare Ordnungen sowie der Aussage „Es gibt genau n Elemente“ besteht?

(2 Punkte)

(4) Sei T eine vollständige $\mathcal{L}$-Theorie. Zeigen Sie, dass T ein maximales Element (bzgl. $\subseteq$) in der Menge $\{\Sigma \subseteq \mathcal{L};\ \Sigma \text{ ist widerspruchsfrei}\}$ ist.

(1 Punkt)

Definition: Die Sprache $\mathcal{L}^*$ sei eine Expansion der Sprache $\mathcal{L}$.
Sei T eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen und S eine Menge von $\mathcal{L}^*$-Aussagen.
Wir nennen S eine *konservative Erweiterung* von T, wenn für jede beliebige $\mathcal{L}$-Aussage φ gilt:

$$S \vdash_{\mathcal{L}^*} \varphi \quad \text{genau dann, wenn} \quad T \vdash_{\mathcal{L}} \varphi.$$

(5) Sei T eine widerspruchsfreie Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen und T_H die Henkinisierung von T.
Zeigen Sie, dass T_H eine konservative Erweiterung von T ist.

(3 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, den 10. Juli 2002.