Prof. Dr. Ulrich Felgner　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　Sommersemester 2002

Mathematische Logik

Übungsblatt 3

(1) Im ersten Teil von Goethes „Faust“ heißt es in der 2. Studierzimmer–Szene:

„Der Philosoph, der tritt herein
Und beweist Euch, es müßt' so sein:
Das Erst' wär' so, das Zweite so,
Und drum das Dritt' und Vierte so;
Und wenn das Erst' und Zweit' nicht wär',
Das Dritt' und Viert' wär nimmermehr,“

Präzisieren Sie diese Argumentation unter Verwendung von Klammern.
Wie muss man Mephisto korrigieren, damit daraus eine Tautologie entsteht?
(1 Punkt)

(2) Zeigen Sie, dass die folgenden Ausdrücke Tautologien sind.
(i) $((\varphi \longleftrightarrow \psi) \longleftrightarrow \theta) \longleftrightarrow (\varphi \longleftrightarrow (\psi \longleftrightarrow \theta))$ (1 Punkt)
(ii) $(\varphi \longleftrightarrow \neg\psi) \longleftrightarrow \neg(\varphi \longleftrightarrow \psi)$ (1 Punkt)

(3) Sei φ ein $\mathcal{L}(\neg, \longleftrightarrow)$-Ausdruck. Zeigen Sie, dass φ genau dann eine Tautologie ist, wenn jedes in φ vorkommende atomare Aussagensymbol A_n geradzahlig oft vorkommt und ebenso $\neg$ geradzahlig oft vorkommt.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe (2). (3 Punkte)

(4) Geben Sie die konjunktive Normalform von $\neg(A_1 \wedge (A_2 \vee A_3) \wedge \neg A_4)$ an.
(1 Punkt)

(5) Prüfen Sie, ob die folgenden beiden Aussagen für beliebige $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$ gültig sind:
(i) Wenn $\Sigma \models \varphi$ oder $\Sigma \models \psi$, dann auch $\Sigma \models \varphi \vee \psi$? (1 Punkt)
(ii) Wenn $\Sigma \models \varphi \vee \psi$, dann auch $\Sigma \models \varphi$ oder $\Sigma \models \psi$? (1 Punkt)

(6) Zeigen Sie, dass für $\varphi, \psi, \theta \in \mathcal{L}$ gilt:
$\varphi \vee \psi \models \theta$ genau dann, wenn $\varphi \models \theta$ und $\psi \models \theta$. (1 Punkt)

Abgabe: Mittwoch, den 15. Mai 2002.