Prof. Dr. Ulrich Felgner Sommersemester 2002

Mathematische Logik

Übungsblatt 4

(1) (i) Zeigen Sie, dass das PEIRCE'sche Gesetz $((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$ eine Tautologie ist.

(1 Punkt)

(ii) LEIBNIZ hatte um 1780 herum den folgenden tautologischen Satz gefunden, den er voll Stolz *praeclarum theorema* nannte.

$$(\varphi_1 \to \psi_1) \wedge (\varphi_2 \to \psi_2) \to (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \to \psi_1 \wedge \psi_2).$$

Zeigen Sie, dass dieses *glänzende Theorem* tatsächlich eine Tautologie ist.

(1 Punkt)

(2) Sei $\mathbf{J}$ ein zweistelliger Junktor, so dass $\mathbf{J}(\varphi, \mathbf{J}(\psi, \varphi))$ und $\neg\mathbf{J}(\mathbf{J}(\varphi, \varphi), \neg\mathbf{J}(\psi, \psi))$ Tautologien sind. Zeigen Sie, dass $\mathbf{J}$ die Implikation ist.

(2 Punkte)

(3) Seien φ_1, φ_2 und ψ $\mathcal{L}$-Ausdrücke und es gelte $\models (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to \psi$. Geben Sie zwei Ausdrücke ψ_1 und ψ_2 an mit $\models \varphi_1 \to \psi_1$ und $\models \varphi_2 \to \psi_2$ und $\models (\psi_1 \wedge \psi_2) \longleftrightarrow \psi$.

(3 Punkte)

(4) Eine Menge $\mathcal{X}$ von $\mathcal{L}$-Ausdrücken heißt *konsequential–abgeschlossen*, wenn für jeden $\mathcal{L}$-Ausdruck φ gilt: Wenn $\mathcal{X} \models \varphi$, dann $\varphi \in \mathcal{X}$.

Beweisen Sie das folgende Sätzchen von A. LINDENBAUM:
Es seien $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ endlich viele konsequential–abgeschlossene Mengen von $\mathcal{L}$-Ausdrücken und $\mathcal{X}_i \neq \bigcup\{\mathcal{X}_k;\ 1 \leq k \leq n\}$ für alle $1 \leq i \leq n$.
Dann ist $\bigcup\{\mathcal{X}_k;\ 1 \leq k \leq n\}$ nicht konsequential–abgeschlossen.

(3 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, den 22. Mai 2002.