Prof. Dr. Ulrich Felgner Sommersemester 2002

Mathematische Logik

Übungsblatt 6

(1) Seien φ und ψ $\mathcal{L}$-Ausdrücke. Geben Sie eine Herleitung des PEIRCE'schen Gesetzes (vgl. Aufgabe (1) von Blatt 4).

$$\vdash ((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi.$$

(2 Punkte)

Definition: Eine Menge Σ von $\mathcal{L}$-Ausdrücken heißt *unabhängig*, wenn es kein $\psi \in \Sigma$ gibt mit $\Sigma - \{\psi\} \models \psi$.

Definition: Zwei Mengen Σ und Γ von $\mathcal{L}$-Ausdrücken heißen *logisch–äquivalent*, wenn $\{\psi \in \mathcal{L};\ \Sigma \models \psi\} = \{\psi \in \mathcal{L};\ \Gamma \models \psi\}$.

(2) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Eine Menge Σ von $\mathcal{L}$-Ausdrücken ist genau dann unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge von Σ unabhängig ist.

(1 Punkt)

(ii) Zu jeder endlichen Menge Σ von $\mathcal{L}$-Ausdrücken gibt es eine logisch–äquivalente unabhängige Teilmenge $\Gamma \subseteq \Sigma$.

(2 Punkte)

(iii) Es gibt eine unendliche Menge von $\mathcal{L}$-Ausdrücken, die keine logisch–äquivalente unabhängige Teilmenge hat.

(2 Punkte)

Zusatzaufgabe:

(iv) Zu jeder unendlichen Menge Σ von $\mathcal{L}$-Ausdrücken gibt es eine logisch–äquivalente unabhängige Menge Γ. (Beachten Sie: Γ muss keine Teilmenge von Σ sein.)

Hinweis: Verwenden Sie die Konjunktive Normalform. (3 Punkte)

(3) Sei $\rangle\!|x$ der Quantor *kein* x. Lässt sich $\rangle\!|x$ mittels $\neg$ und $\forall x$ ausdrücken?

(1 Punkt)

(4) *Kein Narr bekommt einen Logik–Schein.*
Peter ist kein Narr.
Also bekommt Peter einen Logik–Schein.

Warum ist dies ein Fehlschluss und weshalb liegt er nahe? (1 Punkt)

(5) Geben Sie sämtliche freien Variablen der folgenden Formel an:

$$\forall v_1 (\forall v_3 : v_1 = v_4 \to (\forall v_2 : v_2 = v_1 \to v_2 = \dot{f}(v_3)))$$

(1 Punkt)

Abgabe: Mittwoch, den 5. Juni 2002.