Prof. Dr. Ulrich Felgner　　　　Sommersemester 2002

Mathematische Logik

Übungsblatt 8

(1) Geben Sie eine $\mathcal{L}$-Formel mit $\mathrm{Fr}(\varphi) = \{v_0, v_1\}$ an, für die Sie beweisen können, dass $(\exists v_0 \, \forall v_1 : \varphi) \longleftrightarrow (\forall v_1 \, \exists v_0 : \varphi)$ logisch–allgemeingültig ist.

(2 Punkte)

(2) Es seinen φ und ψ beliebige $\mathcal{L}$-Formeln.
Zeigen Sie für drei der folgenden Formeln die logische Allgemeingültigkeit:

(i) $\exists v \, (\varphi \longrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\forall v \, \varphi \longrightarrow \exists v \, \psi)$,

(ii) $\forall v \, (\varphi \longrightarrow \psi) \longrightarrow (\forall v \, \varphi \longrightarrow \forall v \, \psi)$,

(iii) $\forall v \, (\varphi \longrightarrow \psi) \longrightarrow (\exists v \, \varphi \longrightarrow \exists v \, \psi)$,

(iv) $\forall v \, (\varphi \longleftrightarrow \psi) \longrightarrow (\forall v \, \varphi \longleftrightarrow \forall v \, \psi)$,

(v) $\exists v \, (\varphi \longleftrightarrow \psi) \longrightarrow (\exists v \, \varphi \longleftrightarrow \exists v \, \psi)$,

(vi) $\forall v \, (\varphi \wedge \psi) \longleftrightarrow (\forall v \, \varphi \wedge \forall v \, \psi)$,

(vii) $(\forall v \, \varphi \wedge \exists v \, \psi) \longrightarrow \exists v \, (\varphi \wedge \psi)$,

(viii) $\exists v \, (\varphi \wedge \psi) \longrightarrow (\exists v \, \varphi \wedge \exists v \, \psi)$,

(ix) $\exists v \, (\varphi \vee \psi) \longleftrightarrow (\exists v \, \varphi \vee \exists v \, \psi)$,

(x) $\forall v \, (\varphi \vee \psi) \longrightarrow (\forall v \, \varphi \vee \exists v \, \psi)$,

(xi) $(\forall v \, \varphi \vee \forall v \, \psi) \longrightarrow \forall v \, (\varphi \vee \psi)$.

(je 2 Punkte)

(3) Für eine Menge Σ von $\mathcal{L}$-Formeln sei

$$\mathrm{Fg}(\Sigma) = \{\varphi \in \mathcal{L};\ \Sigma \models \varphi\}$$

die Menge aller Folgerungen aus Σ. Offenbar gilt: $\Sigma \subseteq \mathrm{Fg}(\Sigma)$.
Zeigen Sie:

(i) $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \implies \mathrm{Fg}(\Sigma_1) \subseteq \mathrm{Fg}(\Sigma_2)$,

(ii) $\mathrm{Fg}(\mathrm{Fg}(\Sigma)) = \mathrm{Fg}(\Sigma)$.

(2 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, den 19. Juni 2002.