

Proseminar

## **Spieltheorie**

Sommersemester 2022

Informationen bei: Prof. Dr. Martin Möhle  
Eberhard Karls Universität Tübingen  
Mathematisches Institut  
Tel.: 07071/29-78581

# Vortragsübersicht

## Teil I: Allgemeine Spiele in Normalform

- 26.04.2022 1. Einführung, Spiele in Normalform
- 03.05.2022 2. Gleichgewichte in reinen Strategien
- 10.05.2022 3. Abbildung der besten Antwort
- 17.05.2022 4. Äquivalenz von Spielen

## Teil II: Spezielle Spiele in Normalform

- 24.05.2022 5. Konstantsummenspiele, stark kämpferische, symmetrische und endliche Spiele
- 31.05.2022 6. Gemischte Strategien und gemischte Erweiterung
- 14.06.2022 7. Hauptsatz zur Existenz eines Nash-Gleichgewichts
- 21.06.2022 8. Existenz eines Nash-Gleichgewichts für die gemischte Erweiterung eines endlichen Spiels
- 28.06.2022 9. Zwei-Personen-Konstantsummenspiele

## Teil III: Optimierung

- 05.07.2022 10. Lineare Optimierung und Simplex-Algorithmus
- 12.07.2022 11. Berechnung von Nash-Gleichgewichten für Konstantsummenspiele
- 19.07.2022 12. Lineare Optimierung als Spielproblem
- 26.07.2022 13. Test auf Dominiertheit von Strategien

### Allgemeine Hinweise:

1. Das Proseminar orientiert sich weitgehend am Buch von Osborne und Rubinstein sowie dem Vorlesungsskript von Schlee. Es sollte stets die (bessere) Notation aus dem Buch von Osborne und Rubinstein verwendet werden.
2. Zum Vortrag sollte zumindest eine schriftliche Zusammenfassung (3-5 Seiten) ausgeteilt werden, die vorab dem Betreuer vorzulegen ist.

# Teil I

## Allgemeine Spiele in Normalform

### Vortrag 1

#### Thema:

Einführung, Definition eines Spiels in Normalform

#### Literatur:

Osborne & Rubinstein [16], 2.1, 2.3 (ohne Gleichgewichtsaussagen)

Schlee [22], 2.1 (Seite 7 – 10)

#### Inhalt:

- a) Definition eines (strategischen) Spiels  $\Gamma = (I, (A_i)_{i \in I}, (\geq_i)_{i \in I})$  in Normalform.
- b) Erläuterung der Begriffe Spieler, Strategie, Präferenzordnung, bedingte Präferenzordnung.
- c) Spiele mit Auszahlung(sfunktion).
- d) Einige einfache Bimatrixspiel-Beispiele, etwa das Zahl-oder-Wappen-Spiel, das Löwe-Lamm-Spiel und das Schere-Stein-Papier-Spiel.

#### Ergänzende Literatur:

Zum Zahl-oder-Wappen-Spiel siehe auch Owen [17, Beispiel I.2.3, I.3.2]

#### Hinweise:

Der Vortrag sollte vor allem Wert auf eine pädagogisch sinnvolle Notation und saubere Darstellung der Definitionen legen. Komplizierte Notationen (z.B. mit Sternen „\*“) können vermieden werden.

Im Vortrag sollte auch kurz die extensive Form eines Spiels erwähnt werden.

## Vortrag 2

### Thema:

Gleichgewichte (in reinen Strategien)

### Literatur:

Osborne und Rubinstein [16], 2.2 (Seite 14)

Schlee [22], 2.1 (Seite 10 – 20)

### Inhalt:

- a) Definition eines Gleichgewichts in dominanten Strategien
- b) Definition eines Nash-Gleichgewichts
- c) Erläuterung dieser beiden Gleichgewichts-Begriffe an Hand der im Vortrag 1 behandelten Beispiele. Studium weiterer Beispiele, etwa das „Gefangenen-Dilemma“ und der „Kampf der Geschlechter“.

## Vortrag 3

### Thema:

Abbildung der besten Antwort

### Literatur:

Osborne und Rubinstein [16], 2.2 (Seite 15)

Schlee [22], 2.3 (Seite 20 – 23)

### Inhalt:

- a) Definition der Bestantwort-Abbildung  $r$ .
- b) Zusammenhang zwischen der Abbildung  $r$  und Nash-Gleichgewichten.  
Beweis des Satzes, dass eine Strategienkombination  $s$  genau dann ein Nash-Gleichgewicht ist, wenn  $s \in r(s)$ .
- c) Bestimmung der Bestantwort-Abbildung für einige Beispiele, etwa dem Cournotschen Duopol.

## Vortrag 4

### Thema:

Äquivalenz von Spielen

### Literatur:

Schlee [22], 2.3.2 (Seite 23 – 26)

### Inhalt:

- a) Definition der strategischen Äquivalenz.
- b) Charakterisierung durch bedingte Präferenzordnungen.
- c) Äquivalenz bei Spielen mit Auszahlungen (Ordnungsisomorphismus).
- d) Definition der Bestantwort-Äquivalenz

### Ergänzende bzw. einführende Literatur:

Rauhut, Schmitz und Zachow (III. §1)

## Teil II

### Spezielle Spiele in Normalform

#### Vortrag 5

##### Thema:

Konstantsummenspiele, kämpferische, symmetrische und endliche Spiele

##### Literatur:

Schlee [22], 2.3.3 (Seite 27 – 29)

##### Inhalt:

- a) Definition von Konstantsummenspielen und strategisch lineare Äquivalenz zu Nullsummenspielen.
- b) Strategische Äquivalenz eines stark kämpferischen 2-Personen-Spiels mit Auszahlung zu einem Nullsummen-Spiel.
- c) Symmetrische Spiele, endliche Spiele, (Bi)matrix-Spiele.
- d) Schiefsymmetrie ( $U = -U^T$ ) der Auszahlungsmatrix bei Zweipersonen-Nullsummenspielen

## Vortrag 6

### Thema:

Gemischte Strategien und gemischte Erweiterung

### Literatur:

Osborne und Rubinstein [16], 3.1

Schlee 2.3.4 (Seite 29 – 33)

### Inhalt:

- a) Definition einer gemischten Strategie. Konvexität und Kompaktheit der Menge aller gemischten Strategien.
- b) Auszahlungsfunktionen bei gemischten Strategien.
- c) Definition der gemischten Erweiterung eines endlichen Spiels mit Auszahlung
- d) Erhaltung der strategisch linearen Äquivalenz beim Übergang zur gemischten Erweiterung.

### Ergänzende bzw. einführende Literatur:

McKinsey [12], Chapter 2 (Seite 21 – 25)

## Vortrag 7

### Thema:

Hauptsatz zur Existenz eines Nash-Gleichgewichts

### Literatur:

Osborne und Rubinstein [16], 2.4

Schlee [22], 2.4 (Seite 33 – 36)

### Inhalt:

- a) Beweis der Existenz eines Nash-Gleichgewichts bei  $\mathbb{R}^d$ -wertigen, kompakt-konvexen Strategiemengen und stetigen, beschränkten Auszahlungsfunktionen, die quasi-konkav auf  $A_i$  sind.
- b) Fixpunktsatz von Kakutani (Beweis nur, falls genügend Zeit vorhanden)

Hinweis: Einen Beweis des Fixpunktsatzes von Kakutani findet man z.B. in Burger [2], Seite 164 – 165.

## Vortrag 8

### Thema:

Existenz eines Nash-Gleichgewichts der gemischten Erweiterung eines endlichen Spiels

### Literatur:

Osborne und Rubinstein [16], 3.1

Schlee [22] 3.1 (Seite 37 – 41)

### Inhalt:

- a) Beweis für die Existenz eines Nash-Gleichgewichts für die gemischte Erweiterung endlicher Spiele mit Hilfe des in Vortrag 7 erbrachten Hauptsatzes
- b) Äquivalente Formulierung eines Nash-Gleichgewichts mittels reiner Strategien
- c) Falls zeitlich möglich, könnte auch der ursprüngliche Beweis von Nash für die Existenz eines Gleichgewichts für die gemischte Erweiterung endlicher Spiele mit Hilfe des Brouwerscher Fixpunktsatzes vorgeführt werden.

### Ergänzende Literatur:

Nash [14, 15]

Rauhut, Schmitz und Zachow, II. §2

### Hinweis:

Einen Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes findet man z.B. in Burger [2], Seite 164

## Vortrag 9

### Thema:

Zweipersonen-Konstantsummenspiele

### Literatur:

Schlee [22], 3.2 (Seite 44 - 49)

### Inhalt:

- a) Sattelpunkteigenschaft der Nash-Gleichgewichte
- b) Fundamentalsatz (Minimax-Satz)
- c) Beispiel eines Spiels ohne Sattelpunkte in reinen Strategien
- d) Wert eines Zweipersonen-Nullsummenspiels, unterer und oberer Spielwert
- e) Minimax-Beziehungen für Nash-Gleichgewichte

### Ergänzende Literatur:

McKinsey [12] (Seite 21 – 37)

Owen [17] (Seite 17 ff)

Rauhut, Schmitz, Zachow, III. (Seite 123 ff)

## Teil III

### Optimierung

#### Vortrag 10

##### Thema:

Lineare Optimierung und Simplex-Algorithmus

##### Literatur:

Morris [13], 3. (Seite 65 – 85)

##### Inhalt:

- a) Was ist ein lineares Programm?
- b) Primales und duales Problem
- c) Simplex-Algorithmus

##### Einführende Literatur:

McKinsey [12] (Chapter 14)

Hinweis: Dieser Vortrag soll losgelöst von der Spieltheorie verstanden werden und in die Theorie der linearen Optimierung einführen. Der Zusammenhang zur Spieltheorie soll erst in Vortrag 11 behandelt werden.

## Vortrag 11

### Thema:

Berechnung von Nash-Gleichgewichten in Konstantsummenspielen

### Literatur:

Rauhut, Schmitz, Zachow §5 (Seite 196 – 206)

Schlee [22], Seite 49 – 57

### Inhalt:

- a) Ermittlung des Spielwertes und von Minimax-Strategien bei Zweipersonen-Nullsummen-Spielen durch Formulierung als ein lineares Optimierungsproblem
- b) Grafische Bestimmung der Sattelpunktstrategien, falls ein Spieler nur zwei reine Strategien zur Verfügung hat
- c) Beispiele

### Einführende Literatur:

McKinsey [12] (Seite 52 – 55)

## Vortrag 12

### Thema:

Lineare Optimierung als Spielproblem

### Literatur:

Schlee [22], 3.2.4 (Seite 57 – 61)

### Inhalt:

- a) Spielwert und Sattelpunktstrategien von symmetrischen Nullsummen-Spielen
- b) Duales Optimierungsproblem
- c) Formulierung eines linearen Optimierungsproblems als Zweipersonen-Nullsummenspiel.

### Hinweis:

Detaillierte Informationen zu diesem Thema findet man in Luce und Raiffa [9].

## Vortrag 13

### Thema:

Test auf Dominiertheit von Strategien

### Literatur:

Schlee [22], 3.2.5 (Seite 61 – 65)

### Inhalt:

- a) Überprüfung der Dominiertheit einer Strategie mit Hilfe eines Zweipersonen-Nullsummenspiels

### Ergänzende Literatur:

van Damme [3].

# Literaturverzeichnis

- [1] BERGE, C.: *Espaces topologiques et fonctions multivoques*. Dunod, Paris (1966).
- [2] BURGER, E.: *Einführung in die Theorie der Spiele*. Walter de Gruyter & Co, Berlin (1959).
- [3] VAN DAMME, E.: *Stability and Perfection of Nash Equilibria*, 2nd printing. Springer (1996).
- [4] GONZÁLEZ–DÍAZ, J., GARCÍA–JURADO, I., AND FIESTRAS–JANEIRO, G.: *An Introductory Course on Mathematical Game Theory*. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 115, AMS (2010).
- [5] KANZOW, C. UND SCHWARTZ, A.: *Spieltheorie*. Birkhäuser (2018).
- [6] HOLLER, M. J. UND ILLIG, G.: *Einführung in die Spieltheorie*. 5. Auflage, Springer (2003).
- [7] LEMKE, C. E.: Bimatrix equilibrium points and mathematical programming. *Management Science* **11**, 681–689 (1965).
- [8] LEMKE, C. E. AND HOWSON, J. T.: Equilibrium points in bimatrix games. *SIAM Journal of Applied Math.* **12**, 413–423 (1964).
- [9] LUCE, R. D. AND RAIFFA, H.: *Games and Decisions: Introduction and Critical Survey*. Wiley (1957).
- [10] MANGASARIAN, O. L.: Equilibrium points in bimatrix games. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* **12**, 778–780 (1964).
- [11] MCKELVEY R. D. AND MCLENNAN A.: *Computation of equilibria in finite games*, in: *Handbook of Computational Economics*, Volume 1, Edited by AMMAN, H.M., KENDRICK D.A. AND RUST, J., Elsevier, (1996).

- [12] MCKINSEY, J. C. C.: *Introduction to the Theory of Games*. McGraw-Hill Book Company, New York–Toronto–London (1952).
- [13] MORRIS, P.: *Introduction to Game Theory*. Springer (1994).
- [14] NASH, J. F.: Equilibrium points in  $n$ -person games. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **36**, 48–49 (1950).
- [15] NASH, J. F.: Non-cooperative games. *Annals of Mathematics* **54**, 286–295 (1951).
- [16] OSBORNE, M. AND RUBINSTEIN, A.: *A Course in Game Theory*. Cambridge (Mass.), MIT-Press (1994).
- [17] OWEN, G.: *Spieltheorie*. Springer Hochschultext (1970).
- [18] RAUHUT, B., SCHMITZ, N. UND ZACHOW, E.: *Spieltheorie*. Teubner (1979).
- [19] ROSENMÜLLER, J.: On a generalization of the Lemke-Howson algorithm to noncooperative  $n$ -person games. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **21**, 73–79 (1971).
- [20] SCARF, H.: The approximation of fixed points of a continuous mapping. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **15**, 1328–1343 (1967).
- [21] SCARF, H.: *The computation of economic equilibria*. Yale University Press, New Haven (1973).
- [22] SCHLEE, W.: *Einführung in die Spieltheorie*. Vieweg (2004).
- [23] SPERNER, E.: Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* **6**, 265–272 (1928).
- [24] WILSON, R.: Computing equilibria of  $n$ -person games. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **21**, 80–87 (1971).