Proseminar

Spieltheorie

Wintersemester 2010/2011

Informationen bei: Prof. Dr. Martin Möhle
Eberhard Karls Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Tel.: 07071/29-78581

Vortragsübersicht

Teil I: Allgemeine Spiele in Normalform

19.10.2010 1. Einführung, Definition eines Spiels in Normalform

26.10.2010 2. Gleichgewichte (in reinen Strategien)

02.11.2010 3. Abbildung der besten Antworten

09.11.2010 4. Äquivalenz von Spielen

Teil II: Spezielle Spiele in Normalform

16.11.2010 5. Konstantsummenspiele, kämpferische, symmetrische und endliche Spiele

23.11.2010 6. Gemischte Strategien und gemischte Erweiterung

30.11.2010 7. Hauptsatz zur Existenz eines Nash-Gleichgewichts

07.12.2010 8. Existenz eines Nash-Gleichgewichts für die gemischte Erweiterung eines endlichen Spiels

14.12.2010 9. Zweipersonen-Konstantsummenspiele

Teil III: Optimierung

21.12.2010 10. Lineare Optimierung und Simplex-Algorithmus

11.01.2011 11. Berechnung von Nash-Gleichgewichten in Konstantsummenspielen

18.01.2011 12. Lineare Optimierung als Spielproblem

25.01.2011 13. Test auf Dominiertheit von Strategien

01.02.2011 14. Allgemeine Methoden zur Berechnung von Nash-Gleichgewichten

Allgemeine Hinweise:

1. Das Proseminar orientiert sich weitgehend am Buch von Osborne und Rubinstein sowie dem Vorlesungsskript von Schlee. Soweit möglich, sollte die Notation aus dem Buch von Osborne und Rubinstein verwendet werden.
2. Zum Vortrag sollte zumindest eine schriftliche Zusammenfassung (2-4 Seiten) ausgeteilt werden, die vorab dem Betreuer vorzulegen ist.

Teil I

Allgemeine Spiele in Normalform

Vortrag 1

Thema:

Einführung, Definition eines Spiels in Normalform

Literatur:

Osborne & Rubinstein [15], 2.1, 2.3 (ohne Gleichgewichtsaussagen)
Schlee [21], 2.1 (Seite 7 – 10)

Inhalt:

a) Definition eines (strategischen) Spiels $\Gamma = (I, (A_i)_{i \in I}, (\geq_i)_{i \in I})$ in Normalform.

b) Erläuterung der Begriffe Spieler, Strategie, Präferenzordnung, bedingte Präferenzordnung.

c) Spiele mit Auszahlung(sfunktion).

d) Einige einfache Bimatrixspiel-Beispiele, etwa das Zahl-oder-Wappen-Spiel, das Löwe-Lamm-Spiel und das Schere-Stein-Papier-Spiel.

Ergänzende Literatur:

Zum Zahl-oder-Wappen-Spiel siehe auch Owen [16, Beispiel I.2.3, I.3.2]

Hinweise:

Der Vortrag sollte vor allem Wert auf eine pädagogisch sinnvolle Notation und saubere Darstellung der Definitionen legen. Komplizierte Notationen (z.B. mit Sternen „$*$“) können eventuell vermieden werden.

Im Vortrag sollte auch kurz die extensive Form eines Spiels erwähnt werden.

Vortrag 2

Thema:

Gleichgewichte (in reinen Strategien)

Literatur:

Osborne und Rubinstein [15], 2.2 (Seite 14)
Schlee [21], 2.1 (Seite 10 – 20)

Inhalt:

a) Definition eines Gleichgewichts in dominanten Strategien

b) Definition eines Nash-Gleichgewichts

c) Erläuterung dieser beiden Gleichgewichts-Begriffe an Hand der im Vortrag 1 behandelten Beispiele. Studium weiterer Beispiele, etwa das „Gefangenen-Dilemma“ und der „Kampf der Geschlechter“.

Vortrag 3

Thema:

Abbildung der besten Antwort

Literatur:

Osborne und Rubinstein [15], 2.2 (Seite 15)
Schlee [21], 2.3 (Seite 20 – 23)

Inhalt:

a) Definition der Bestantwort-Abbildung r.

b) Zusammenhang zwischen der Abbildung r und Nash-Gleichgewichten. Beweis des Satzes, dass eine Strategienkombination s genau dann ein Nash-Gleichgewicht ist, wenn $s \in r(s)$.

c) Bestimmung der Bestantwort-Abbildung für einige Beispiele, etwa dem Cournotschen Dyopol.

Vortrag 4

Thema:

Äquivalenz von Spielen

Literatur:

Schlee [21], 2.3.2 (Seite 23 – 26)

Inhalt:

a) Definition der strategischen Äquivalenz.

b) Charakterisierung durch bedingte Präferenzordnungen.

c) Äquivalenz bei Spielen mit Auszahlungen (Ordnungsisomorphismus).

d) Definition der Bestantwort-Äquivalenz

Ergänzende bzw. einführende Literatur:

Rauhut, Schmitz und Zachow (III. §1)

Teil II

Spezielle Spiele in Normalform

Vortrag 5

Thema:

Konstantsummenspiele, kämpferische, symmetrische und endliche Spiele

Literatur:

Schlee [21], 2.3.3 (Seite 27 – 29)

Inhalt:

a) Definition von Konstantsummenspielen und strategisch lineare Äquivalenz zu Nullsummenspielen.

b) Strategische Äquivalenz eines stark kämpferischen 2-Personen-Spiels mit Auszahlung zu einem Nullsummen-Spiel.

c) Symmetrische Spiele, endliche Spiele, (Bi)matrix-Spiele.

d) Schiefsymmetrie ($U = -U^T$) der Auszahlungsmatrix bei Zweipersonen-Nullsummenspielen

Vortrag 6

Thema:

Gemischte Strategien und gemischte Erweiterung

Literatur:

Osborne und Rubinstein [15], 3.1
Schlee 2.3.4 (Seite 29 – 33)

Inhalt:

a) Definition einer gemischten Strategie. Konvexität und Kompaktheit der Menge aller gemischten Strategien.

b) Auszahlungsfunktionen bei gemischten Strategien.

c) Definition der gemischten Erweiterung eines endlichen Spiels mit Auszahlung

d) Erhaltung der strategisch linearen Äquivalenz beim Übergang zur gemischten Erweiterung.

Ergänzende bzw. einführende Literatur:

McKinsey [11], Chapter 2 (Seite 21 – 25)

Vortrag 7

Thema:

Hauptsatz zur Existenz eines Nash-Gleichgewichts

Literatur:

Osborne und Rubinstein [15], 2.4
Schlee [21], 2.4 (Seite 33 – 36)

Inhalt:

a) Beweis der Existenz eines Nash-Gleichgewichts bei $\mathbb{R}^d$-wertigen, kompakt-konvexen Strategiemengen und stetigen, beschränkten Auszahlungsfunktionen, die quasi-konkav auf A_i sind.

b) Fixpunktsatz von Kakutani (Beweis nur, falls genügend Zeit vorhanden)

Hinweis: Einen Beweis des Fixpunktsatzes von Kakutani findet man z.B. in Burger [2], Seite 164 – 165.

Vortrag 8

Thema:

Existenz eines Nash-Gleichgewichts der gemischten Erweiterung eines endlichen Spiels

Literatur:

Osborne und Rubinstein [15], 3.1
Schlee [21] 3.1 (Seite 37 – 41)

Inhalt:

a) Beweis für die Existenz eines Nash-Gleichgewichts für die gemischte Erweiterung endlicher Spiele mit Hilfe des in Vortrag 7 erbrachten Hauptsatzes

b) Äquivalente Formulierung eines Nash-Gleichgewichts mittels reiner Strategien

c) Falls zeitlich möglich, könnte auch der ursprüngliche Beweis von Nash für die Existenz eines Gleichgewichts für die gemischte Erweiterung endlicher Spiele mit Hilfe des Brouwerscher Fixpunktsatzes vorgeführt werden.

Ergänzende Literatur:

Nash [13, 14]
Rauhut, Schmitz und Zachow, II. §2

Hinweis:

Einen Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes findet man z.B. in Burger [2], Seite 164

Vortrag 9

Thema:

Zweipersonen-Konstantsummenspiele

Literatur:

Schlee [21], 3.2 (Seite 44 - 49)

Inhalt:

a) Sattelpunkteigenschaft der Nash-Gleichgewichte
b) Fundamentalsatz (Minimax-Satz)
c) Beispiel eines Spiels ohne Sattelpunkte in reinen Strategien
d) Wert eines Zweipersonen-Nullsummenspiels, unterer und oberer Spielwert
e) Minimax-Beziehungen für Nash-Gleichgewichte

Ergänzende Literatur:

McKinsey [11] (Seite 21 – 37)
Owen [16] (Seite 17 ff)
Rauhut, Schmitz, Zachow, III. (Seite 123 ff)

Teil III

Optimierung

Vortrag 10

Thema:

Lineare Optimierung und Simplex-Algorithmus

Literatur:

Morris [12], 3. (Seite 65 – 85)

Inhalt:

a) Was ist ein lineares Programm?

b) Primales und duales Problem

c) Simplex-Algorithmus

Einführende Literatur:

McKinsey [11] (Chapter 14)

Hinweis: Dieser Vortrag soll losgelöst von der Spieltheorie verstanden werden und in die Theorie der linearen Optimierung einführen. Der Zusammenhang zur Spieltheorie soll erst in Vortrag 11 behandelt werden.

Vortrag 11

Thema:

Berechnung von Nash-Gleichgewichten in Konstantsummenspielen

Literatur:

Rauhut, Schmitz, Zachow §5 (Seite 196 – 206)
Schlee [21], Seite 49 – 57

Inhalt:

a) Ermittlung des Spielwertes und von Minimax-Strategien bei Zweipersonen-Nullsummen-Spielen durch Formulierung als ein lineares Optimierungsproblem

b) Grafische Bestimmung der Sattelpunktstrategien, falls ein Spieler nur zwei reine Strategien zur Verfügung hat

c) Beispiele

Einführende Literatur:

McKinsey [11] (Seite 52 – 55)

Vortrag 12

Thema:

Lineare Optimierung als Spielproblem

Literatur:

Schlee [21], 3.2.4 (Seite 57 – 61)

Inhalt:

a) Spielwert und Sattelpunktstrategien von symmetrischen Nullsummen-Spielen

b) Duales Optimierungsproblem

c) Formulierung eines linearen Optimierungsproblems als Zweipersonen-Nullsummenspiel.

Hinweis:

Detaillierte Informationen zu diesem Thema findet man in Luce und Raiffa [8].

Vortrag 13

Thema:

Test auf Dominiertheit von Strategien

Literatur:

Schlee [21], 3.2.5 (Seite 61 – 65)

Inhalt:

a) Überprüfung der Dominiertheit einer Strategie mit Hilfe eines Zweipersonen-Nullsummenspiels

Ergänzende Literatur:

van Damme [3].

Vortrag 14

Thema:

Allgemeine Methoden zur Berechnung von Nash-Gleichgewichten

Literatur:

McKelvey, McLennan [10], Kapitel 2, (Seite 90 – 93)
Schlee [21], 3.4 (Seite 77 – 83)

Inhalt:

a) Drei mögliche Ansätze zur Berechnung von Nash-Gleichgewichten

b) Komplementaritätsproblem, Fixpunktproblem, Nullstellenproblem

Hinweis: Dieser Vortrag ist als Ausblick gedacht. Mathematische Beweise können wegen ihrer Komplexität kaum gegeben werden. Ziel des Vortrages ist es, mögliche Ansätze zur Berechnung von Nash-Gleichgewichten aufzuzeigen, ohne sich dabei zu sehr mit den Details zu beschäftigen. Eventuell kann man sich auch auf nur einen der drei Ansätze konzentrieren.

Literaturverzeichnis

[1] BERGE, C.: *Espaces topologiques et functions multivoques.* Dunod, Paris (1966).

[2] BURGER, E.: *Einführung in die Theorie der Spiele.* Walter de Gruyter & Co, Berlin (1959).

[3] VAN DAMME, E.: *Stability and Perfection of Nash Equilibria*, 2nd printing. Springer (1996).

[4] GONZÁLEZ–DÍAZ, J., GARCÍA–JURADO, I., AND FIESTRAS–JANEIRO, G.: *An Introductory Course on Mathematical Game Theory.* Graduate Studies in Mathematics, Vol. 115, AMS (2010).

[5] HOLLER, M.J. UND ILLIG, G.: *Einführung in die Spieltheorie.* 5. Auflage, Springer (2003).

[6] LEMKE, C.E.: Bimatrix equilibrium points and mathematical programming. *Management Science* **11**, 681–689 (1965).

[7] LEMKE, C.E. AND HOWSON, J.T.: Equilibrium points in bimatrix games. *SIAM Journal of Applied Math.* **12**, 413–423 (1964).

[8] LUCE, R.D. UND RAIFFA, H.: *Games and Decisions: Introduction and Critical Survey.* Wiley (1957).

[9] MANGASARIAN, O.L.: Equilibrium points in bimatrix games. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* **12**, 778–780 (1964).

[10] MCKELVEY R.D. AND MCLENNAN A.: *Computation of equilibria in finite games*, in: *Handbook of Computational Economics*, Volume 1, Edited by AMMAN, H.M., KENDRICK D.A. AND RUST, J., Elsevier, (1996).

[11] MCKINSEY, J.C.C.: *Introduction to the Theory of Games.* McGraw-Hill Book Company, New York–Toronto–London (1952).

[12] MORRIS, P.: *Introduction to Game Theory.* Springer (1994).

[13] Nash, J.F.: Equilibrium points in n-person games. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **36**, 48–49 (1950).

[14] Nash, J.F.: Non-cooperative games. *Annals of Mathematics* **54**, 286–295 (1951).

[15] Osborne, M. and Rubinstein, A.: *A Course in Game Theory.* Cambridge (Mass.), MIT-Press (1994).

[16] Owen, G.: *Spieltheorie.* Springer Hochschultext (1970).

[17] Rauhut, B., Schmitz, N. und Zachow, E.: *Spieltheorie.* Teubner (1979).

[18] Rosenmüller, J.: On a generalization of the Lemke-Howson algorithm to noncoopeartive n-person games. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **21**, 73–79 (1971).

[19] Scarf, H.: The approximation of fixed points of a continuous mapping. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **15**, 1328–1343 (1967).

[20] Scarf, H.: *The computation of economic equilibria.* Yale University Press, New Haven (1973).

[21] Schlee, W.: *Einführung in die Spieltheorie.* Vieweg (2004).

[22] Sperner, E.: Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 6, 265–272 (1928).

[23] Wilson, R.: Computing equilibria of n-person games. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **21**, 80–87 (1971).