Seminar

Stochastische Populationsmodelle

Sommersemester 2026

Informationen bei: Prof. Dr. Martin Möhle
Eberhard Karls Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Tel.: 07071/29-78581
URL: https://www.math.uni-tuebingen.de/
user/moehle/sem26_g.htm

Hinweis: Herr Möhle ist vom 23. Februar
bis zum 10. März 2026 in Urlaub.

Vortragsübersicht

(Vorträge jeweils Dienstags, 14:15 Uhr)

Teil I: Ein zweigeschlechtliches Moran-Modell

21.04.2026	1.	Nachkommen, Aussterbewahrscheinlichkeit
28.04.2026	2.	Vorfahren
05.05.2026	3.	Grenzverhalten des Vorfahrensprozesses

Teil II: Coalescent-Theorie

12.05.2026	4.	Austauschbare Populationsmodelle, Vorfahren
19.05.2026	5.	n-Coalescent
26.05.2026	6.	Konvergenz gegen den n-Coalescent
02.06.2026	7.	Coalescent, Paintbox
09.06.2026	8.	Thema noch offen
16.06.2026	9.	Thema noch offen
23.06.2026	10.	Thema noch offen
30.06.2026	11.	Thema noch offen

Teil III: MCMC-Methoden

07.07.2026	12.	MCMC bei endlichem Zustandsraum
14.07.2026	13.	MCMC für W-maße mit Dichten

Allgemeiner Hinweis:

Zum Vortrag sollte zumindest eine schriftliche Zusammenfassung (2 bis 4 Seiten) ausgeteilt werden, die vorab dem Betreuer vorzulegen ist.

Teil I

Ein zweigeschlechtliches Moran-Modell

Vortrag 1

Thema:

Nachkommen, Aussterbewahrscheinlichkeit

Literatur:

Kämmerle [8], Abschnitte II.1. und II.2.
Kämmerle [9], Abschnitte 1. und 2.
Möhle [14], Abschnitte 1.1, 1.2 und 1.3

Inhalt:

1. Definition des Moran-Modells (anschaulich und durch Konstruktion eines Grundraumes)
2. Definition des Nachkommenprozesses (Nachkommenspaar), Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten, Submartingaleigenschaft
3. Berechnung der Aussterbewahrscheinlichkeit der Nachkommenschaft; Log-Konkavität der Aussterbewahrscheinlichkeiten

Ergänzende Literatur:
Zu den Grundbegriffen von Markoffketten und Martingalen:
z.B. Bauer [1] und Feller [6]

Hinweise:

Im Vortrag sollte auch erläutert werden, warum die (zunächst unterschiedlich erscheinenden) Modelle in [8] und [14] stochastisch identisch sind.

Vortrag 2

Thema:

Vorfahren

Literatur:

Kämmerle [8], Abschnitte II.3., II.5. und VII. Anhang 1
Kämmerle [9], Abschnitt 3. (bis zum Theorem ausschließlich), 4.
Möhle [14], Abschnitt 1.4, Seiten 9 bis 13

Inhalt:

1. Definition des Vorfahrensprozesses (Vorfahrenspaar), Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten

2. Existenz und Eindeutigkeit der stationären Verteilung; Zusammenhang zwischen Nachkommen und Vorfahren, d.h. zwischen Aussterbewahrscheinlichkeiten der Nachkommenschaft und der stationären Verteilung des Vorfahrensprozesses.

Ergänzende Literatur:
Ewens [4], z.B. Abschnitt 2.11: Finite Markov Chains

Vortrag 3

Thema:

Grenzverhalten des Vorfahrensprozesses

Literatur:

Kämmerle [8], Abschnitte II.4., und VII. Anhang 2
Kämmerle [9], Abschnitt 3. (nur das Theorem mit Beweis)
Möhle [14], Abschnitt 1.4, Seite 14

Inhalt:

1. Ornstein–Uhlenbeck-Prozess und seine stationäre Verteilung.
2. Schwache Konvergenz von Prozessen, Diffusionsapproximationen.
3. Anwendung: Schwache Konvergenz des Vorfahrensprozesses im Moran-Modell gegen einen Ornstein–Uhlenbeck-Prozess.

Hinweise:

Grundlegendes zur Konvergenz von Prozessen findet man z.B. in Ethier & Kurtz [3], insbesondere Seiten 225–234.

Teil II

Coalescent-Theorie

Vortrag 4

Thema:

Austauschbare Populationsmodelle, Vorfahren

Literatur:

Kingman [10], Abschnitte 1, 2 und 4
Kingman [11], Abschnitt 3
Möhle [15], Abschnitte 1 und 5

Inhalt:

1. Definition von austauschbaren Populationsmodellen mit fester Gesamtpopulationsgröße N und austauschbaren Familiengrößen $\nu_1, \ldots, \nu_N$
2. Beispiele: Wright-Fisher-Modell (WFM), Moran-Modell (MM)
3. Definition des Vorfahrensprozesses $\mathcal{R} := (\mathcal{R}_r)_{r=0,1,2,\ldots}$ mit Zustandsraum $\mathcal{E}_n$, der Menge aller Äquivalenzrelationen auf $\{1, \ldots, n\}$. Beachte: $\mathcal{R}_r = {}_{(N)}\mathcal{R}_r^{(n)}$ hängt von der Anzahl der ausgewählten Individuen n und von der Gesamtpopulationsgröße N ab.
4. Übergangsmatrix $P_N = (p_{\xi\eta})_{\xi,\eta \in \mathcal{E}_n}$ des Prozesses $\mathcal{R}$. Beweis von
$$p_{\xi\eta} \;=\; \Phi_a(b_1, \ldots, b_a) := \frac{(N)_a}{(N)_b} \mathrm{E}((\nu_1)_{b_1} \cdots (\nu_a)_{b_a}).$$
Berechnung von $p_{\xi\eta}$ für das WFM und das MM
5. Monotonieeigenschaft und Rekursion der $\Phi_a(b_1, \ldots, b_a)$ (siehe [15, Seite 984])
6. Verschmelzungswahrscheinlichkeit $c_N = \Phi_1(2)$ allgemein und speziell für das WFM und das MM

Ergänzende Literatur: Endliche Markoffketten in diskreter Zeit

Vortrag 5

Thema:

n-Coalescent

Literatur:

Kingman [10], Abschnitt 5
Kingman [11], Abschnitte 1 und 2
Kingman [12], Abschnitt 1

Inhalt:

1. Einführung des n-Coalescent $R = (R_t)_{t \geq 0}$ als Markoffkette durch Angabe des zugehörigen infinitesimalen Generators $Q = (q_{\xi\eta})_{\xi,\eta \in \mathcal{E}_n}$. Bildliche Darstellung des n-Coalescent

2. Verteilung der Verweilzeit in einem Zustand $\xi \in \mathcal{E}_n$

3. Eigenschaften des zugehörigen Prozesses $D := (D_t)_{t \geq 0}$, definiert durch $D_t := |R_t| \; \forall \; t \geq 0$.

4. Zeit T_n zurück bis zum gemeinsamen Vorfahr.

Ergänzende Literatur: Endliche Markoffketten in kontinuierlicher Zeit

Vortrag 6

Thema:

Konvergenz gegen den n-Coalescent

Literatur:

Kingman [10], Abschnitte 1 und 2
Kingman [11], Abschnitt 3
Möhle und Sagitov [16]

Inhalt:

Hauptsatz: Es gelte $\phi_1(3) := \lim_{N\to\infty} \Phi_1^{(N)}(3)/c_N = 0$. Dann konvergieren (für jedes feste $n \in \{1, 2, \ldots\}$) die endlichdimensionalen Verteilungen des zeit-transformierten Vorfahrensprozesses $(\mathcal{R}^{(n)}_{[t/c_N]})_{t\geq 0}$ mit $N \to \infty$ gegen diejenigen des n-Coalescent $R = (R_t)_{t\geq 0}$.

Hinweise zum Beweis des Hauptsatzes:

1. Zeige zunächst, dass aus $\phi_1(3) = 0$ auch $\lim_{N\to\infty} c_N = 0$ und $\phi_2(2, 2) := \lim_{N\to\infty} \Phi_2(2, 2)/c_N = 0$ folgt. Dies gelingt ähnlich wie in [16, Lemma 5.5].

2. Zeige nun, dass $P_N = I + c_N Q + o(c_N)$. Nutze dazu die in Vortrag 1 hergeleitete Monotonie und Rekursion der $\Phi_a(b_1, \ldots, b_a)$ aus.

3. Zum Nachweis von $\lim_{N\to\infty} P_N^{[t/c_N]} = e^{tQ}$ modifiziere den Beweis von Kingman [10, Abschnitt 2, Seite 31] geeignet. Warum folgt daraus bereits die Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen?

Hinweise:

Falls genügend Zeit bleibt, kann auch noch die Konvergenz in der Skorohod-Topologie gezeigt werden. Dies gelingt z.B. mit Theorem 2.6 aus Ethier und Kurtz [3, page 168].

Vortrag 7

Thema:

Coalescent, Paintbox

Literatur:

Kingman [10] Abschnitt 7 und 8
Kingman [11] Abschnitt 1 und 2
Kingman [12]

Inhalt:

1. Zerlegung des n-Coalescent $R_t = \mathcal{R}_{D_t}$
2. Die Menge $\mathcal{E}$ der Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$, aufgefasst als Teilraum von $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, Austauschbarkeit von W-maßen auf $\mathcal{E}$, Konstruktion austauschbarer Zufallsvariablen
3. Existenz des Coalescent, Paintbox-Konstruktion

Vortrag 8

noch offen

Vortrag 9

noch offen

Vortrag 10

noch offen

Vortrag 11

noch offen

Teil III

MCMC-Methoden

Vortrag 12

Thema:

MCMC bei endlichem Zustandsraum

Literatur:

Brémaud [2], Kapitel 7

Inhalt:

1. Stationäre Verteilung, Reversibilität, Detailed Balance
2. Metropolis-Hastings-Algorithmus, Vorschlagsmatrix, Was wird mit diesem Algorithmus überhaupt approximiert und wie?
3. Vergleich mit Independent Sampling
4. Fehlerabschätzungen
5. Problem des „burn-in"

Ergänzende Literatur:

Ewens und Grant [5], Kapitel 10

Vortrag 13

Thema:

MCMC für W-maße mit Dichten

Literatur:

Liu [13], Kapitel 5
Robert and Casella [17], Kapitel 6

Inhalt:

1. Irreduzibilität, Harris-Rekurrenz
2. Vorschlags-Verteilung
3. Metropolis-Hastings-Algorithmus
4. Warum funktioniert dieser Algorithmus?
5. Spezielle Verfahren, etwa Metropolis oder independent sampler
6. Fehlerabschätzungen

Ergänzende Literatur:

Gilks, Richardson and Spiegelhalter [7]

Literaturverzeichnis

[1] (1978) *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie.* Walter de Gruyter, Berlin – New York.

[2] Brémaud, P. (1999) *Markov Chains, Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues*, Springer.

[3] Ethier, S. N. and Kurtz, T. G. (1986) *Markov Processes. Characterization and Convergence*, Wiley, New York.

[4] Ewens, W. J. (1979) *Mathematical Population Genetics.* Springer, Berlin

[5] Ewens, W. J. and Grant, G. R. (2001) Statistical Methods in Bioinformatics, Springer.

[6] Feller, W. (1966/1971) *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume I and II.* Wiley, New York.

[7] Gilks, W. R., Richardson, S. and Spiegelhalter, D. J. (1996) *Markov Chain Monte Carlo in Practice.* Chapman & Hall.

[8] Kämmerle, K. (1989) Vertauschbare bisexuelle Populationsmodelle. Dissertation, Johannes–Gutenberg Universität Mainz.

[9] Kämmerle, K. (1989) Looking forwards and backwards in a bisexual Moran model. *J. Appl. Probab.* **27**, 880–885.

[10] Kingman, J. F. C. (1982) On the genealogy of large populations, *J. Appl. Probab.* **19A**, 27–43.

[11] Kingman, J. F. C. (1982) Exchangeability and the evolution of large populations. in: Koch, G. and Spizzichino, F.: *Exchangeability in Probability and Statistics*, North-Holland, New-York, pp. 97–112.

[12] Kingman, J. F. C. (1982) The coalescent. *Stochastic Process. Appl.* **13**, 235–248.

[13] Liu, Jun S. (2001) *Monte Carlo Strategies in Scientific Computing*, Springer.

[14] Möhle, M. (1994) Nachkommens- und Vorfahrensstrukturen in neutralen bisexuellen Populationsmodellen. Dissertation, Johannes–Gutenberg Universität Mainz.

[15] Möhle, M. (2000) Total variation distances and rates of convergence for ancestral coalescent processes in exchangeable population models, *Adv. Appl. Probab.* **32**, 983–993.

[16] Möhle, M. and Sagitov, S. (2003) Coalescent patterns in diploid exchangeable population models, *J. Math. Biol.* **47**, 337–352.

[17] Robert, C. P. and Casella, G. (1999) *Monte Carlo Statistical Methods*, Springer.