

Proseminar

## **Spieltheorie**

Wintersemester 2026/2027

Informationen bei: Prof. Dr. Martin Möhle  
Eberhard Karls Universität Tübingen  
Mathematisches Institut  
Tel.: 07071/29-78581

# Vortragsübersicht

## Teil I: Allgemeine Spiele in Normalform

- 20.10.2026 1. Einführung, Spiele in Normalform
- 27.10.2026 2. Gleichgewichte in reinen Strategien
- 03.11.2026 3. Abbildung der besten Antwort
- 10.11.2026 4. Äquivalenz von Spielen

## Teil II: Spezielle Spiele in Normalform

- 17.11.2026 5. Konstantsummenspiele, stark kämpferische, symmetrische und endliche Spiele
- 24.11.2026 6. Gemischte Strategien und gemischte Erweiterung
- 01.12.2026 7. Hauptsatz zur Existenz eines Nash-Gleichgewichts
- 08.12.2026 8. Existenz eines Nash-Gleichgewichts für die gemischte Erweiterung eines endlichen Spiels
- 15.12.2026 9. Zwei-Personen-Konstantsummenspiele

## Teil III: Optimierung

- 22.12.2026 10. Lineare Optimierung und Simplex-Algorithmus
- 12.01.2027 11. Berechnung von Nash-Gleichgewichten für Konstantsummenspiele
- 19.01.2027 12. Lineare Optimierung als Spielproblem
- 26.01.2027 13. Test auf Dominiertheit von Strategien
- 02.02.2027 14. Allgemeine Methoden zur Berechnung von Nash-Gleichgewichten

### Allgemeine Hinweise:

- 1. Das Proseminar orientiert sich weitgehend am Buch von Osborne und Rubinstein sowie dem Vorlesungsskript von Schlee. Soweit möglich, sollte die Notation aus dem Buch von Osborne und Rubinstein verwendet werden.
- 2. Zum Vortrag sollte zumindest eine schriftliche Zusammenfassung (3-5 Seiten) ausgeteilt werden, die vorab dem Betreuer vorzulegen ist.

# Teil I

## Allgemeine Spiele in Normalform

### Vortrag 1

#### Thema:

Einführung, Definition eines Spiels in Normalform

#### Literatur:

Osborne & Rubinstein [15], 2.1, 2.3 (ohne Gleichgewichtsaussagen)

Schlee [21], 2.1 (Seite 7 – 10)

#### Inhalt:

- a) Definition eines (strategischen) Spiels  $\Gamma = (I, (A_i)_{i \in I}, (\geq_i)_{i \in I})$  in Normalform.
- b) Erläuterung der Begriffe Spieler, Strategie, Präferenzordnung, bedingte Präferenzordnung.
- c) Spiele mit Auszahlung(sfunktion).
- d) Einige einfache Bimatrixspiel-Beispiele, etwa das Zahl-oder-Wappen-Spiel, das Löwe-Lamm-Spiel und das Schere-Stein-Papier-Spiel.

#### Ergänzende Literatur:

Zum Zahl-oder-Wappen-Spiel siehe auch Owen [16, Beispiel I.2.3, I.3.2]

#### Hinweise:

Der Vortrag sollte vor allem Wert auf eine pädagogisch sinnvolle Notation und saubere Darstellung der Definitionen legen. Komplizierte Notationen (z.B. mit Sternen „\*“) können eventuell vermieden werden.

Im Vortrag sollte auch kurz die extensive Form eines Spiels erwähnt werden.

## Vortrag 2

### Thema:

Gleichgewichte (in reinen Strategien)

### Literatur:

Osborne und Rubinstein [15], 2.2 (Seite 14)

Schlee [21], 2.1 (Seite 10 – 20)

### Inhalt:

- a) Definition eines Gleichgewichts in dominanten Strategien
- b) Definition eines Nash-Gleichgewichts
- c) Erläuterung dieser beiden Gleichgewichts-Begriffe an Hand der im Vortrag 1 behandelten Beispiele. Studium weiterer Beispiele, etwa das „Gefangenen-Dilemma“ und der „Kampf der Geschlechter“.

## Vortrag 3

### Thema:

Abbildung der besten Antwort

### Literatur:

Osborne und Rubinstein [15], 2.2 (Seite 15)

Schlee [21], 2.3 (Seite 20 – 23)

### Inhalt:

- a) Definition der Bestantwort-Abbildung  $r$ .
- b) Zusammenhang zwischen der Abbildung  $r$  und Nash-Gleichgewichten. Beweis des Satzes, dass eine Strategienkombination  $s$  genau dann ein Nash-Gleichgewicht ist, wenn  $s \in r(s)$ .
- c) Bestimmung der Bestantwort-Abbildung für einige Beispiele, etwa dem Cournotschen Duopol.

## Vortrag 4

Thema:

Äquivalenz von Spielen

Literatur:

Schlee [21], 2.3.2 (Seite 23 – 26)

Inhalt:

- a) Definition der strategischen Äquivalenz.
- b) Charakterisierung durch bedingte Präferenzordnungen.
- c) Äquivalenz bei Spielen mit Auszahlungen (Ordnungsisomorphismus).
- d) Definition der Bestantwort-Äquivalenz

Ergänzende bzw. einführende Literatur:

Rauhut, Schmitz und Zachow (III. §1)

## Teil II

### Spezielle Spiele in Normalform

#### Vortrag 5

##### Thema:

Konstantsummenspiele, kämpferische, symmetrische und endliche Spiele

##### Literatur:

Schlee [21], 2.3.3 (Seite 27 – 29)

##### Inhalt:

- a) Definition von Konstantsummenspielen und strategisch lineare Äquivalenz zu Nullsummenspielen.
- b) Strategische Äquivalenz eines stark kämpferischen 2-Personen-Spiels mit Auszahlung zu einem Nullsummen-Spiel.
- c) Symmetrische Spiele, endliche Spiele, (Bi)matrix-Spiele.
- d) Schiefsymmetrie ( $U = -U^T$ ) der Auszahlungsmatrix bei Zweipersonen-Nullsummenspielen

## Vortrag 6

### Thema:

Gemischte Strategien und gemischte Erweiterung

### Literatur:

Osborne und Rubinstein [15], 3.1

Schlee 2.3.4 (Seite 29 – 33)

### Inhalt:

- a) Definition einer gemischten Strategie. Konvexität und Kompaktheit der Menge aller gemischten Strategien.
- b) Auszahlungsfunktionen bei gemischten Strategien.
- c) Definition der gemischten Erweiterung eines endlichen Spiels mit Auszahlung
- d) Erhaltung der strategisch linearen Äquivalenz beim Übergang zur gemischten Erweiterung.

### Ergänzende bzw. einführende Literatur:

McKinsey [11], Chapter 2 (Seite 21 – 25)

## Vortrag 7

### Thema:

Hauptsatz zur Existenz eines Nash-Gleichgewichts

### Literatur:

Osborne und Rubinstein [15], 2.4

Schlee [21], 2.4 (Seite 33 – 36)

### Inhalt:

- a) Beweis der Existenz eines Nash-Gleichgewichts bei  $\mathbb{R}^d$ -wertigen, kompakt-konvexen Strategiemengen und stetigen, beschränkten Auszahlungsfunktionen, die quasi-konkav auf  $A_i$  sind.
- b) Fixpunktsatz von Kakutani (Beweis nur, falls genügend Zeit vorhanden)

Hinweis: Einen Beweis des Fixpunktsatzes von Kakutani findet man z.B. in Burger [2], Seite 164 – 165.

## Vortrag 8

### Thema:

Existenz eines Nash-Gleichgewichts der gemischten Erweiterung eines endlichen Spiels

### Literatur:

Osborne und Rubinstein [15], 3.1

Schlee [21] 3.1 (Seite 37 – 41)

### Inhalt:

- a) Beweis für die Existenz eines Nash-Gleichgewichts für die gemischte Erweiterung endlicher Spiele mit Hilfe des in Vortrag 7 erbrachten Hauptsatzes
- b) Äquivalente Formulierung eines Nash-Gleichgewichts mittels reiner Strategien
- c) Falls zeitlich möglich, könnte auch der ursprüngliche Beweis von Nash für die Existenz eines Gleichgewichts für die gemischte Erweiterung endlicher Spiele mit Hilfe des Brouwerscher Fixpunktsatzes vorgeführt werden.

### Ergänzende Literatur:

Nash [13, 14]

Rauhut, Schmitz und Zachow, II. §2

### Hinweis:

Einen Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes findet man z.B. in Burger [2], Seite 164

## Vortrag 9

### Thema:

Zweipersonen-Konstantsummenspiele

### Literatur:

Schlee [21], 3.2 (Seite 44 - 49)

### Inhalt:

- a) Sattelpunkteigenschaft der Nash-Gleichgewichte
- b) Fundamentalsatz (Minimax-Satz)
- c) Beispiel eines Spiels ohne Sattelpunkte in reinen Strategien
- d) Wert eines Zweipersonen-Nullsummenspiels, unterer und oberer Spielwert
- e) Minimax-Beziehungen für Nash-Gleichgewichte

### Ergänzende Literatur:

McKinsey [11] (Seite 21 – 37)

Owen [16] (Seite 17 ff)

Rauhut, Schmitz, Zachow, III. (Seite 123 ff)

## Teil III

### Optimierung

#### Vortrag 10

##### Thema:

Lineare Optimierung und Simplex-Algorithmus

##### Literatur:

Morris [12], 3. (Seite 65 – 85)

##### Inhalt:

- a) Was ist ein lineares Programm?
- b) Primales und duales Problem
- c) Simplex-Algorithmus

##### Einführende Literatur:

McKinsey [11] (Chapter 14)

Hinweis: Dieser Vortrag soll losgelöst von der Spieltheorie verstanden werden und in die Theorie der linearen Optimierung einführen. Der Zusammenhang zur Spieltheorie soll erst in Vortrag 11 behandelt werden.

## Vortrag 11

### Thema:

Berechnung von Nash-Gleichgewichten in Konstantsummenspielen

### Literatur:

Rauhut, Schmitz, Zachow §5 (Seite 196 – 206)

Schlee [21], Seite 49 – 57

### Inhalt:

- a) Ermittlung des Spielwertes und von Minimax-Strategien bei Zweipersonen-Nullsummen-Spielen durch Formulierung als ein lineares Optimierungsproblem
- b) Grafische Bestimmung der Sattelpunktstrategien, falls ein Spieler nur zwei reine Strategien zur Verfügung hat
- c) Beispiele

### Einführende Literatur:

McKinsey [11] (Seite 52 – 55)

## Vortrag 12

### Thema:

Lineare Optimierung als Spielproblem

### Literatur:

Schlee [21], 3.2.4 (Seite 57 – 61)

### Inhalt:

- a) Spielwert und Sattelpunktstrategien von symmetrischen Nullsummen-Spielen
- b) Duales Optimierungsproblem
- c) Formulierung eines linearen Optimierungsproblems als Zweipersonen-Nullsummenspiel.

### Hinweis:

Detaillierte Informationen zu diesem Thema findet man in Luce und Raiffa [8].

## Vortrag 13

### Thema:

Test auf Dominiertheit von Strategien

### Literatur:

Schlee [21], 3.2.5 (Seite 61 – 65)

### Inhalt:

- a) Überprüfung der Dominiertheit einer Strategie mit Hilfe eines Zweipersonen-Nullsummenspiels

### Ergänzende Literatur:

van Damme [3].

## Vortrag 14

### Thema:

Allgemeine Methoden zur Berechnung von Nash-Gleichgewichten

### Literatur:

McKelvey, McLennan [10], Kapitel 2, (Seite 90 – 93)

Schlee [21], 3.4 (Seite 77 – 83)

### Inhalt:

- a) Drei mögliche Ansätze zur Berechnung von Nash-Gleichgewichten
- b) Komplementaritätsproblem, Fixpunktproblem, Nullstellenproblem

Hinweis: Dieser Vortrag ist als Ausblick gedacht. Mathematische Beweise können wegen ihrer Komplexität kaum gegeben werden. Ziel des Vortrages ist es, mögliche Ansätze zur Berechnung von Nash-Gleichgewichten aufzuzeigen, ohne sich dabei zu sehr mit den Details zu beschäftigen. Eventuell kann man sich auch auf nur einen der drei Ansätze konzentrieren.

# Literaturverzeichnis

- [1] BERGE, C.: *Espaces topologiques et fonctions multivoques*. Dunod, Paris (1966).
- [2] BURGER, E.: *Einführung in die Theorie der Spiele*. Walter de Gruyter & Co, Berlin (1959).
- [3] VAN DAMME, E.: *Stability and Perfection of Nash Equilibria*, 2nd printing. Springer (1996).
- [4] GONZÁLEZ-DÍAZ, J., GARCÍA-JURADO, I., AND FIESTRAS-JANEIRO, G.: *An Introductory Course on Mathematical Game Theory*. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 115, AMS (2010).
- [5] HOLLER, M.J. UND ILLIG, G.: *Einführung in die Spieltheorie*. 5. Auflage, Springer (2003).
- [6] LEMKE, C.E.: Bimatrix equilibrium points and mathematical programming. *Management Science* **11**, 681–689 (1965).
- [7] LEMKE, C.E. AND HOWSON, J.T.: Equilibrium points in bimatrix games. *SIAM Journal of Applied Math.* **12**, 413–423 (1964).
- [8] LUCE, R.D. UND RAIFFA, H.: *Games and Decisions: Introduction and Critical Survey*. Wiley (1957).
- [9] MANGASARIAN, O.L.: Equilibrium points in bimatrix games. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* **12**, 778–780 (1964).
- [10] MCKELVEY R.D. AND MCLENNAN A.: *Computation of equilibria in finite games*, in: *Handbook of Computational Economics*, Volume 1, Edited by AMMAN, H.M., KENDRICK D.A. AND RUST, J., Elsevier, (1996).
- [11] MCKINSEY, J.C.C.: *Introduction to the Theory of Games*. McGraw-Hill Book Company, New York–Toronto–London (1952).
- [12] MORRIS, P.: *Introduction to Game Theory*. Springer (1994).

- [13] NASH, J.F.: Equilibrium points in  $n$ -person games. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **36**, 48–49 (1950).
- [14] NASH, J.F.: Non-cooperative games. *Annals of Mathematics* **54**, 286–295 (1951).
- [15] OSBORNE, M. AND RUBINSTEIN, A.: *A Course in Game Theory*. Cambridge (Mass.), MIT-Press (1994).
- [16] OWEN, G.: *Spieltheorie*. Springer Hochschultext (1970).
- [17] RAUHUT, B., SCHMITZ, N. UND ZACHOW, E.: *Spieltheorie*. Teubner (1979).
- [18] ROSENMÜLLER, J.: On a generalization of the Lemke-Howson algorithm to noncooperative  $n$ -person games. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **21**, 73–79 (1971).
- [19] SCARF, H.: The approximation of fixed points of a continuous mapping. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **15**, 1328–1343 (1967).
- [20] SCARF, H.: *The computation of economic equilibria*. Yale University Press, New Haven (1973).
- [21] SCHLEE, W.: *Einführung in die Spieltheorie*. Vieweg (2004).
- [22] SPERNER, E.: Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* **6**, 265–272 (1928).
- [23] WILSON, R.: Computing equilibria of  $n$ -person games. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **21**, 80–87 (1971).