

# Riemannsche Flächen

Reiner Schätzle  
Wintersemester 2022/23  
Sommersemester 2023  
Universität Tübingen



# Inhaltsverzeichnis

|     |                                                     |     |
|-----|-----------------------------------------------------|-----|
| I   | Grundlegende Begriffe                               | 1   |
| 1   | Differenzierbare Mannigfaltigkeiten                 | 1   |
| 2   | Riemannsche Flächen                                 | 4   |
| 3   | Metriken auf Riemannschen Flächen                   | 13  |
| 4   | Die Sätze von Gauß-Bonnet und Riemann-Hurwitz       | 28  |
| II  | Hyperbolische Riemannsche Flächen                   | 43  |
| 5   | Die Kobayashi Metrik                                | 43  |
| 6   | Die Sätze von Picard und Montel                     | 51  |
| III | Uniformisierung                                     | 56  |
| 7   | Das Poisson-Problem                                 | 56  |
| 8   | Das globale Maximumprinzip auf Riemannschen Flächen | 70  |
| 9   | Einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen        | 80  |
| 10  | Universelle Überlagerungen                          | 85  |
| IV  | Appendix                                            | 92  |
| A   | Simpliziale Homologie                               | 92  |
| B   | Überlagerungsprojektionen                           | 96  |
| C   | Die Gruppe der gebrochen linearen Abbildungen       | 107 |
| D   | Der Satz von Sard                                   | 114 |
| E   | Das zweite Abzählbarkeitsaxiom                      | 117 |



## Teil I

# Grundlegende Begriffe

## 1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

**Definition 1.1**  $M$  sei ein topologischer Raum und  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Eine  $n$ -dimensionale Karte von  $M$  ist ein Homöomorphismus

$$\varphi : U \subseteq M \xrightarrow{\sim} V \subseteq \mathbb{R}^n$$

von einer offenen Menge  $U \subseteq M$  auf eine offene Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Zwei Karten  $\varphi_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\sim} V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $\varphi_\beta : U_\beta \xrightarrow{\sim} V_\beta \subseteq \mathbb{R}^n$  heissen  $C^m$ -verträglich, falls die Übergangsabbildungen

$$(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

$$(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

$C^m$ -Diffeomorphismen sind. Ein  $C^m$ - oder differenzierbarer bzw. für  $m = \infty$  glatter Atlas von  $M$  ist eine Menge  $\mathcal{A}$  von  $C^m$ -verträglichen Karten  $\mathcal{A} := \{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in I}$  mit  $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ .

Jeder  $C^m$ -Atlas  $\mathcal{A}$  ist in einem eindeutigen maximalen  $C^m$ -Atlas  $\mathcal{A}_{\max}$  enthalten (ein Atlas  $\mathcal{A}$  heisst maximal, falls für jeden Atlas  $\mathcal{A}'$  mit  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$  folgt  $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ ).

Eine  $n$ -dimensionale  $C^m$ -Mannigfaltigkeit oder kurz differenzierbare bzw. für  $m = \infty$  glatte Mannigfaltigkeit  $(M, \mathcal{A}_{\max})$  ist ein nicht-leerer topologischer Hausdorff-Raum  $M$ , der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, zusammen mit einem maximalen Atlas  $\mathcal{A}_{\max}$ . Da  $\mathcal{A}_{\max}$  eindeutig ist, schreiben wir dafür auch  $(M, \mathcal{A})$  für einen beliebigen Atlas  $\mathcal{A}$ .

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit heisst orientierbar, falls es einen Atlas  $\mathcal{A}$  auf  $M$  gibt, so dass für je zwei Karten  $\varphi_\alpha, \varphi_\beta \in \mathcal{A}$  gilt

$$\det(d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_p) > 0$$

für alle  $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n$ . In diesem Fall heisst  $\mathcal{A}$  ein orientierter Atlas von  $M$ .

□

## Beispiele

1.  $\mathbb{R}^n$  mit dem Atlas, der aus der identischen Karte  $\text{id} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  besteht, ist eine  $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.
2. Es sei  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $C^m$ -Abbildung und  $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann ist  $\text{graph } f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$  mit dem Atlas, der aus der Karte

$$\pi : \text{graph } f \longrightarrow U, (x, f(x)) \mapsto x,$$

besteht, eine  $C^m$ -Mannigfaltigkeit.

3. Es sei  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^m$ -Abbildung mit  $\nabla f(x) \neq 0$  für  $f(x) = 0$ . Mit dem impliziten Funktionensatz kann  $M = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) = 0\}$  in jedem Punkt als lokaler  $C^m$ -Graph dargestellt werden. Damit ist  $M$  eine  $n$ -dimensionale  $C^m$ -Mannigfaltigkeit.

□

**Definition 1.2** Es seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine stetige Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heisst differenzierbar, genauer  $C^m$ , bzw. glatt für  $m = \infty$ , falls für beliebige Karten  $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\psi : V \subseteq N \rightarrow \mathbb{R}^m$  die Abbildung

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(f^{-1}(V)) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

differenzierbar, genauer  $C^m$ , ist.

$f$  heisst Diffeomorphismus, falls  $f$  differenzierbar und bijektiv ist und  $f^{-1}$  auch differenzierbar ist. In diesem Fall heissen  $M$  und  $N$  diffeomorph.

□

**Definition 1.3**  $M$  sei eine differenzierbare  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $p \in M$ . Wir betrachten das Tripel  $(\varphi, p, X)$  bestehend aus einer Karte  $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $p \in U$  und  $X \in \mathbb{R}^n$ . Zwei Tripel heissen äquivalent, falls

$$(\varphi, p, X) \sim (\psi, p, Y) \quad :\Longleftrightarrow \quad d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \cdot X = Y.$$

Der Tangentialraum von  $M$  an  $p$  ist definiert durch

$$T_p M := \{[(\varphi, p, X)]\}$$

als die Menge der Äquivalenzklassen der Tripel.

$T_p M$  ist ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum, und für eine Karte  $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $p \in U$  ist

$$(d\varphi)_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit

$$(d\varphi)_p \cdot [(\varphi, p, X)] := X$$

ein Vektorraum-Isomorphismus.

$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$  heisst Tangentialbündel von  $M$ , der Tangentialraum  $T_p M$  an  $p$  heisst auch Faser von  $TM$  über  $p$ .

□

### Bemerkung:

Das Tangentialbündel  $TM$  ist eine  $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Dazu betrachte man für eine Karte  $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Abbildung  $(\varphi, d\varphi) : TU := \bigcup_{p \in U} T_p M \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  definiert durch  $(\varphi, d\varphi)([\varphi, p, X]) := (\varphi(p), d\varphi_p \cdot [\varphi, p, X]) = (\varphi(p), X)$ .

□

**Definition 1.4**  $f : M \longrightarrow N$  sei eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Das Differential von  $f$  in  $p \in M$  ist die lineare Abbildung

$$df_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$$

für beliebige Karten  $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $p \in U$  und  $\psi : V \subseteq N \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f(p) \in V$  definiert durch

$$d\psi_{f(p)} \circ df_p \circ (d\varphi_p)^{-1} = d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}.$$

□

## 2 Riemannsche Flächen

**Definition 2.1**  $M$  sei ein topologischer Raum.

Zwei Karten  $z_\alpha : U_\alpha \subseteq M \xrightarrow{\sim} V_\alpha \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  und  $z_\beta : U_\beta \subseteq M \xrightarrow{\sim} V_\beta \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  wie in Definition (1.1) heissen biholomorph verträglich, falls die Übergangsabbildungen

$$\begin{aligned} z_\beta \circ z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) &\longrightarrow z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \\ z_\alpha \circ z_\beta^{-1} : z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) &\longrightarrow z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \end{aligned}$$

holomorph sind. Ein komplexer Atlas von  $M$  ist ein glatter Atlas von  $M$ , dessen Karten paarweise biholomorph verträglich sind. Eine komplexe Struktur ist ein maximaler komplexer Atlas.

Eine Riemannsche Fläche ist eine Fläche, d.h. eine zusammenhängende zweidimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, mit einer komplexen Struktur.

Da ein komplexer Atlas eine eindeutige komplexe Struktur bestimmt, nennen wir auch eine differenzierbare Fläche mit einem beliebigen komplexen Atlas eine Riemannsche Fläche.

□

### Beispiele:

1. Jede offene, nicht-leere Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  ist mit dem Atlas, der aus der identischen Karte  $\text{id} : U \xrightarrow{\sim} U$  besteht, eine Riemannsche Fläche.
2. Die Riemannsche Zahlenkugel  $S^2 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  ist mit dem Atlas, der aus den Karten

$$\begin{aligned} \text{id} : \mathbb{C} \subseteq S^2 &\xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \\ 1/z : \mathbb{C} \cup \{\infty\} - \{0\} \subseteq S^2 &\xrightarrow{\sim} \mathbb{C}, \quad z \mapsto 1/z \end{aligned}$$

besteht, eine Riemannsche Fläche.

3. Tori: Es seien  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$  linear unabhängig über  $\mathbb{R}$ .

$$\Gamma := \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 = \{nw_1 + mw_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

heisst das von  $w_1, w_2$  aufgespannte Gitter.  $\Gamma$  definiert durch

$$z \sim z' \iff z - z' \in \Gamma$$

eine Äquivalenzrelation.

$\mathbb{C}/\Gamma$  sei die Menge der Äquivalenzklassen und  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$  die kanonische Projektion. Wir betrachten  $U \subseteq \mathbb{C}$ , für die verschiedene Elemente  $z \neq z' \in U$  nicht äquivalent  $z \not\sim z'$  sind. Dann ist die Abbildung

$$\pi|_U : U \longrightarrow \pi(U)$$

bijektiv, und die Menge  $\{(\pi|_U)^{-1} \mid U\}$  definiert einen komplexen Atlas auf  $\mathbb{C}/\Gamma$ .

Damit ist der Torus  $\mathbb{C}/\Gamma$  eine Riemannsche Fläche.

4. Es sei  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion,  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend.

Dann ist  $\text{graph } f = \{(z, f(z)) \mid z \in U\}$  mit dem Atlas, der aus der Karte

$$\pi : \text{graph } f \rightarrow U, (x, f(x)) \mapsto x,$$

besteht, eine Riemannsche Fläche.

□

**Definition 2.2**  *$M$  und  $N$  seien Riemannsche Flächen. Eine stetige Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heisst holomorph, falls für beliebige Karten  $z : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}$  und  $w : V \subseteq N \rightarrow \mathbb{C}$  die Abbildung*

$$w \circ f \circ z^{-1} : z(f^{-1}(V) \cap U) \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

*holomorph ist.*

*$f$  heisst biholomorph oder Isomorphismus, falls  $f$  holomorph und bijektiv ist und  $f^{-1}$  auch holomorph ist. In diesem Fall heissen  $M$  und  $N$  isomorph oder biholomorph.*

*Eine komplexe Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  heisst holomorph, falls  $f$  holomorph ist als Abbildung zwischen den Riemannschen Flächen  $M$  und  $\mathbb{C}$  mit der kanonischen komplexen Struktur ist.*

*Eine holomorphe Abbildung  $f : M \rightarrow S^2$ ,  $f \not\equiv \infty$ , heisst meromorphe Funktion auf  $M$ .*

*Die Menge der holomorphen bzw. meromorphen Funktionen auf  $M$  wird mit  $\mathcal{O}(M)$  bzw.  $\mathcal{M}(M)$  bezeichnet.*

□

### Bemerkungen:

1.  $M, N, O$  seien Riemannsche Flächen, und  $f : M \rightarrow N$  und  $g : N \rightarrow O$  seien holomorph. Dann ist auch  $g \circ f : M \rightarrow O$  holomorph.
2. Summe und Produkt holomorpher bzw. meromorpher Funktionen sind wieder holomorph bzw. meromorph. Konstante Funktionen sind holomorph bzw. meromorph. Damit sind  $\mathcal{O}(M)$  und  $\mathcal{M}(M)$   $\mathbb{C}$ -Algebren. Da  $\mathbb{C} \subseteq S^2$  gilt  $\mathcal{O}(M) \subseteq \mathcal{M}(M)$ .
3. Eine holomorphe Abbildung  $f : M \rightarrow N$  induziert einen  $\mathbb{C}$ -Algebra-Homomorphismus  $f^\# : \mathcal{O}(N) \rightarrow \mathcal{O}(M)$  durch  $f^\#(\varphi) := \varphi \circ f$ .
4. Mit dem Riemannschen Abbildungssatz, siehe [Ru] Theorem 14.8 oder [Sch-b] Satz 3.2, sind alle einfach zusammenhängenden, offenen Mengen  $U \subseteq \mathbb{C}, U \neq \mathbb{C}, \emptyset$ , biholomorph zum Einheitsball  $D := B_1(0)$ . Andererseits gibt es mit dem Satz von Liouville keine nicht-konstante holomorphe Abbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow D$ , und daher sind  $\mathbb{C}$  und  $D$  nicht biholomorph. Klarerweise ist  $S^2$  nicht biholomorph zu  $\mathbb{C}$  oder  $D$ , da  $\mathbb{C}$  und  $D$  nicht kompakt sind. Tatsächlich sind dies mit dem Uniformisierungssatz bis auf Biholomorphie die einzigen einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen.

## 5. Die Riemannsche Fläche einer holomorphen Funktion

Für eine Riemannsche Fläche  $M$  betrachten wir die Paare  $(f, U)$  mit  $U \subseteq M$  offen und  $f$  eine holomorphe oder meromorphe Funktion auf  $U$  oder eine holomorphe Abbildung  $U \rightarrow N$  in eine gegebene Riemannsche Fläche  $N$ .

Für  $p \in M$  heissen zwei Paare  $(f, U) \sim_p (g, V)$  als äquivalent in  $p$ , wenn für eine offene Umgebung  $W(p) \subseteq U \cap V$  von  $p$  die Gleichheit  $f = g$  in  $W(p)$  gilt. Mit  $(f, U)_p$  bezeichnen wir die Äquivalenzklasse, in der das Paar  $(f, U)$  liegt, die Äquivalenzklassen heissen die Keime in  $p$ , und die Menge aller Keime in  $p$  heisst der Halm von  $p$ . Es sei  $\mathcal{M}$  die Menge aller Keime von Punkten in  $M$ , genauer verwenden wir  $\mathcal{M}$  als Oberbegriff und schreiben  $\mathcal{H}$  bzw.  $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$  für holomorphe Funktionen,  $\mathcal{M}$  bzw.  $\mathcal{M}_{S^2}$  für meromorphe Funktionen, und  $\mathcal{M}_N$  für holomorphe Abbildungen  $U \rightarrow N$ . Auf  $\mathcal{M}$  sind die Projektion  $\pi : \mathcal{M} \rightarrow M$ ,  $(f, U)_p \mapsto p$  und die Evaluation  $\omega : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}, S^2$  oder  $N$ ,  $(f, U)_p \mapsto f(p)$  wohldefiniert.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\omega} & \mathbb{C}, S^2, N \\ \pi \downarrow & & \\ M & & \end{array}$$

Mit  $\langle f, U \rangle$  bezeichnen wir die Menge aller Keime  $(f, U)_p$  mit  $p \in U$ . Klarerweise ist  $\pi|_{\langle f, U \rangle} \xrightarrow{\sim} U$  bijektiv. Für  $\sigma \in \langle f, U \rangle \cap \langle g, V \rangle$  gilt  $\sigma = (f, U)_p = (g, V)_p$ , also  $f = g$  auf einer offenen Umgebung  $W(p) \subseteq U \cap V$  von  $p$  und

$$\sigma \in \langle f, W(p) \rangle = \langle g, W(p) \rangle \subseteq \langle f, U \rangle \cap \langle g, V \rangle.$$

Damit bilden  $\{\langle f, U \rangle\}$  die Basis einer Topologie, und wir betrachten  $\mathcal{M}$  als topologischen Raum mit dieser Topologie. Damit ist  $\omega$  stetig, und  $\pi$  ist ein lokaler Homöomorphismus.

Weiter ist  $\mathcal{M}$  ein Hausdorff-Raum, denn unterscheiden sich für  $\sigma \neq \tilde{\sigma} \in \mathcal{M}$  die Bilder  $\pi(\sigma) \neq \pi(\tilde{\sigma})$  oder  $\omega(\sigma) \neq \omega(\tilde{\sigma})$ , so werden  $\sigma$  und  $\tilde{\sigma}$  durch geeignete offene Urbilder von  $\pi$  oder  $\omega$  getrennt, da  $M, \mathbb{C}, S^2, N$  Hausdorff-Räume sind. Ist andererseits  $p = \pi(\sigma) = \pi(\tilde{\sigma})$  und  $\omega(\sigma) = \omega(\tilde{\sigma})$ , so schreiben wir  $\sigma = (f, U)_p \neq \tilde{\sigma} = (g, V)_p$  und haben  $f(p) = g(p)$ . Gibt es in jeder offenen Umgebung  $W(p) \subseteq U \cap V$  von  $p$  einen Keim  $\mu \in \langle f, W(p) \rangle \cap \langle g, W(p) \rangle \neq \emptyset$ , so gilt  $q := \pi(\mu) \in W(p)$  und  $f(q) = \omega(\mu) = g(q)$ . Wäre  $q = p$ , so wäre  $\mu = (f, W(p))_p = \sigma = \tilde{\sigma}$  mit Symmetrie im Widerspruch zur Annahme. Dann folgt mit dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen bzw. Abbildungen, dass  $f = g$  in jeder offenen zusammenhängenden Umgebung  $W_0(p) \subseteq U \cap V$  von  $p$ , also  $\sigma = (f, W_0(p))_p = (g, W_0(p))_p = \tilde{\sigma}$  im Widerspruch zur Annahme. Daher gibt es eine offene Umgebung  $W(p) \subseteq U \cap V$  von  $p$  mit  $\langle f, W(p) \rangle \cap \langle g, W(p) \rangle = \emptyset$ , und, da  $\sigma \in \langle f, W(p) \rangle, \tilde{\sigma} \in \langle g, W(p) \rangle$  offene Basismengen sind, ist  $\mathcal{M}$  ein Hausdorff-Raum.

Da  $\pi$  ein lokaler Homöomorphismus ist, bilden für jede offene Menge  $\langle f, U \rangle \subseteq \mathcal{M}$  und für jede Karte  $z : V \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $U \subseteq V$  die Karten  $z \circ \pi|_{\langle f, U \rangle} \xrightarrow{\sim} z(U) \subseteq \mathbb{C}$  einen komplexen Atlas von  $X$ .

Da  $M$  als Riemannsche Fläche das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und lokal zusammenhängend ist, hat  $M$  eine abzählbare Basis aus offenen, zusammenhängenden Menge  $U_n \subseteq M, n \in \mathbb{N}$ . Da  $U_n$  eine Basis von  $M$  bilden, überdecken die offenen Menge  $\langle f, U_n \rangle$  den Raum  $\mathcal{M}$ . Ist  $\sigma \in \langle f, U_n \rangle \cap \langle g, U_m \rangle \neq \emptyset$ , so stimmen für  $p := \pi(\sigma) \in U_n \cap U_m$  die Keime  $(f, U_n)_p = (g, U_m)_p$  überein, also gilt in einer offenen Umgebung  $W(p) \subseteq U_n \cap U_m$  von  $p$  die Gleichheit  $f = g$  in  $W(p)$ . Da mit dem lokalen Zusammenhang von  $M$  als Riemannsche Fläche die Zusammenhangskomponente  $Z$  der offenen Menge  $U_n \cap U_m$ , die  $p$  enthält, selbst offen ist, folgt mit dem Identitätssatz die Gleichheit  $f = g$  in  $Z$ . Ist weiter  $\langle f, U_n \rangle \cap \langle \tilde{g}, U_m \rangle \neq \emptyset$ , so folgt genauso  $f = \tilde{g}$  in einer Zusammenhangskomponente  $\tilde{Z}$  von  $U_n \cap U_m$ . Ist  $Z = \tilde{Z}$ , so folgt  $g = \tilde{g}$  in  $Z \subseteq U_m$ , und, da  $U_m$  zusammenhängend ist, mit dem Identitätssatz  $g = \tilde{g}$  in  $U_m$ , also  $\langle g, U_m \rangle = \langle \tilde{g}, U_m \rangle$ . Da  $U_n \cap U_m$  nur abzählbar viele Zusammenhangskomponenten hat, da  $M$  als Riemannsche Fläche das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, schliessen wir, jedes  $\langle f, U_n \rangle$  schneidet sich mit nur abzählbar vielen  $\langle g, U_m \rangle$ . Nennen wir  $\langle f, U_n \rangle$  und  $\langle g, U_m \rangle$  äquivalent, wenn sich diese durch eine Kette  $\langle f, U_n \rangle = \langle f_0, U_{n_0} \rangle, \dots, \langle f_J, U_{n_J} \rangle = \langle g, U_m \rangle$  mit

$$\langle f_{j-1}, U_{n_{j-1}} \rangle \cap \langle f_j, U_{n_j} \rangle \neq \emptyset \quad \text{für } j = 1, \dots, J \quad (2.1)$$

verbinden lassen, so enthalten alle Äquivalenzklassen nur abzählbar viele Elemente. Nun sind die Zusammenhangskomponenten von  $\mathcal{M}$  in den Vereinigungen dieser Äquivalenzklassen enthalten, tatsächlich sind diese Vereinigungen die Zusammenhangskomponenten von  $\mathcal{M}$ , da alle  $\langle f, U_n \rangle \cong U_n$  zusammenhängend sind. Da  $\langle f, U_n \rangle \cong U_n \subseteq M$ , hat jedes  $\langle f, U_n \rangle$  eine abzählbare Basis. Da jede Zusammenhangskomponenten von  $\mathcal{M}$  von abzählbar vielen  $\langle f, U_n \rangle$  überdeckt werden, ist die Vereinigung dieser Basen eine abzählbare Basis dieser Zusammenhangskomponente, und die Zusammenhangskomponenten von  $\mathcal{M}$  erfüllen das zweite Abzählbarkeitsaxiom und sind somit Riemannsche Flächen.

Nun ist für jede Karte  $z \circ \pi$  aus obigem komplexen Atlas von  $\mathcal{M}$  und jede Karte  $w : W \subseteq N_0 \in \{\mathbb{C}, S^2, N\} \rightarrow \mathbb{C}$  von  $N_0$  die Verkettungen

$$\begin{aligned} z \circ \pi \circ (z \circ \pi)^{-1} &= i : z(U) \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \\ w \circ \omega \circ (z \circ \pi)^{-1} &= w \circ f \circ z^{-1} : z(f^{-1}(W) \cap U) \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \end{aligned}$$

holomorph, also sind  $\pi$  und  $\omega$  holomorphe Abbildungen auf den Zusammenhangskomponenten von  $\mathcal{M}$ .

Ist schliesslich ein konstanter Keim  $\sigma \in \mathcal{M}$ , d.h.  $\sigma = (\alpha, U)_p$  für die konstante Funktion  $\alpha : U \subseteq M \rightarrow N_0, \alpha \in N_0$ , so ist  $\sigma \in \langle f, U_n \rangle$  mit obiger Überdeckung, also ist  $f \equiv \alpha$  konstant auf  $U_n$ , da  $U_n \subseteq M$  zusammenhängend ist. Mit der Kette in (2.1) folgt für jedes  $\langle g, U_m \rangle$  äquivalent zu  $\langle f, U_n \rangle$ , dass auch  $g \equiv \alpha$  konstant auf  $U_m$  ist. Damit besteht die Zusammenhangskomponente von  $\mathcal{M}$ , die den konstanten Keim  $\sigma$  enthält, nur aus konstanten Keimen mit gleichem  $\alpha \in N_0$ , und  $\omega \equiv \alpha$  auf dieser Zusammenhangskomponente. Umgekehrt enthält keine Zusammenhangskomponente von  $\mathcal{M}$ , auf der die Evaluation nicht konstant ist, einen konstanten Keim.

□

Eine Riemannsche Fläche  $M$  hat als zweidimensionale Mannigfaltigkeit in jedem Punkt  $p \in M$  einen zweidimensionalen reellen Tangentialraum. Wir geben eine formale Definition.

**Definition 2.3** Auf den Tripeln  $(z, p, w)$  bestehend aus einer Karte  $z : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}$  der komplexen Struktur mit  $p \in U$  und  $w \in \mathbb{C}$  betrachten wir die Äquivalenzrelation

$$(z, p, w) \sim (z', p, w') \quad :\Longleftrightarrow \quad d(z' \circ z^{-1})_{z(p)} \cdot w = w'.$$

Die Äquivalenzklassen  $[(z, p, w)]$  heissen Tangentialvektoren in  $p \in M$ , und der komplexe Tangentialraum von  $M$  in  $p$  ist die Menge der Äquivalenzklassen

$$(T\mathbb{C})_p M := \{[(z, p, w)]\}.$$

Da  $z' \circ z^{-1}$  holomorph ist, gilt

$$d(z' \circ z^{-1})_{z(p)} \cdot (iw) = i \cdot d(z' \circ z^{-1})_{z(p)} \cdot w$$

und  $(T\mathbb{C})_p M$  ist ein komplexer Vektorraum der komplexen Dimension 1.

□

Mit der Identifikation  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  sieht man, dass  $T_p M$  der reelle Vektorraum ist, der  $(T\mathbb{C})_p M$  unterliegt. Die komplexe Multiplikation mit  $i$  auf  $(T\mathbb{C})_p M$  erzeugt auf  $T_p M$  einen reellen Vektorraum-Isomorphismus, und wir erhalten folgende Definition.

**Definition 2.4** Auf einer Riemannschen Fläche  $M$  ist eine glatte Abbildung

$$J : TM \longrightarrow TM$$

definiert, die auf jeder Faser

$$J_p : T_p M \longrightarrow T_p M$$

ein reeller Vektorraum-Isomorphismus ist, gegeben durch

$$J_p[(\varphi, p, X)] = [(\varphi, p, iX)].$$

Es gilt  $J^2 = -\text{id}$  auf jeder Faser.

□

## Bemerkungen:

1. Eine Abbildung  $J$  auf einer differenzierbaren  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  mit

$$J_p : T_p M \rightarrow T_p M \text{ linear}$$

bzw.

$$J_p : T_p M \times (T_p M)^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ bilinear}$$

heisst differenzierbar, wenn für jede Karte  $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$  eines Atlas von  $M$  die Abbildungen

$$J_\varphi : (y, X, Y^*) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow J_{\varphi^{-1}(y)}((d\varphi_{\varphi^{-1}(y)})^{-1} \cdot X, (d\varphi_{\varphi^{-1}(y)})^* \cdot Y^*) \in \mathbb{R}$$

differenzierbar mit einer Ableitung weniger sind, da die Ableitungen der Karten  $\varphi$  verwendet werden, wobei für eine lineare Abbildung  $T : V \rightarrow W$  die duale Abbildung  $T^* : W^* \rightarrow V^*$  durch  $T^*w^* := w^* \circ T$  gegeben ist. In diesem Fall sind für alle Karten  $\psi$  von  $M$  die Abbildungen  $J_\psi$  differenzierbar.

Analog heisst eine Abbildung  $J$  auf  $M$  mit

$$J_p : \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_{k\text{-mal}} \times \underbrace{(T_p M)^* \times \dots \times (T_p M)^*}_{l\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R} \text{ multilinear}$$

differenzierbar, und in diesem Fall heisst  $J$  ein  $k$ -fach kovariantes und  $l$ -fach kontravariantes Tensorfeld auf  $M$ .

2. Eine glatte Abbildung  $J : TM \rightarrow TM, J_p : T_p M \rightarrow T_p M$ , mit  $J^2 = -\text{id}$  auf einer zweidimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  heisst fast komplexe Struktur.
3. Da  $m(t) = t^2 + 1$  irreduzibel über  $\mathbb{R}$  ist, und  $m(J) = 0$ , ist es das Minimalpolynom von  $J$ .

□

**Proposition 2.1** *Eine differenzierbare Abbildung  $f : M \rightarrow N$  zwischen zwei Riemannschen Flächen ist holomorph genau dann, wenn*

$$df \circ J_M = J_N \circ df.$$

**Beweis:**

Wir betrachten Karten  $z : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}$  und  $w : V \subseteq N \rightarrow \mathbb{C}$ .

Die Abbildung  $w \circ f \circ z^{-1}$  ist holomorph genau dann, wenn

$$d(w \circ f \circ z^{-1}).iX = i d(w \circ f \circ z^{-1}).X$$

Setzen wir  $\bar{X} := [(z, p, X)] \in T_p M$ , also  $dz_p \cdot \bar{X} = X$ , so ist dies gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} dw_{f(p)} \circ df_p \cdot J_{M,p} \bar{X} &= dw_{f(p)} \circ df_p \circ (dz_p)^{-1} \cdot iX = i dw_{f(p)} \circ df_p \circ (dz_p)^{-1} \cdot X \\ &= dw_{f(p)} \circ J_{N,f(p)} \circ df_p \cdot \bar{X}, \end{aligned}$$

also

$$J_{N,f(p)} \circ df_p = df_p \circ J_{M,p},$$

da  $dw_{f(p)} : T_{f(p)} N \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$  ein Isomorphismus ist.

///

Für Berechnungen innerhalb von Karten ist der folgende Wirtinger-Kalkül hilfreich.

**Definition 2.5**  $M$  sei eine glatte Fläche und  $U \subseteq M$  offen. Für eine Karte  $z : U \rightarrow \mathbb{C}$  betrachten wir die Differentialoperatoren

$$\partial_x, \partial_y : C_{loc}^\infty(U, \mathbb{C}) \longrightarrow C_{loc}^\infty(U, \mathbb{C})$$

definiert durch

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}(f \circ z^{-1}) \circ z \quad \text{und} \quad \partial_y f = \frac{\partial}{\partial y}(f \circ z^{-1}) \circ z.$$

Weiter betrachten wir die Differentialoperatoren des “Wirtinger-Kalküls”:

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \quad \text{und} \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

und den Laplace-Operator

$$\Delta_z = \partial_x^2 + \partial_y^2.$$

□

**Proposition 2.2**

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{4} \Delta_z.$$

**Beweis:**

Es gilt

$$4\partial_z \partial_{\bar{z}} = (\partial_x - i\partial_y)(\partial_x + i\partial_y) = \partial_x^2 + \partial_y^2 = \Delta_z.$$

///

**Proposition 2.3**  $M$  sei eine glatte Fläche,  $z, w : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}$  seien zwei Karten von  $M$  und  $f \in C_{loc}^\infty(U, \mathbb{C})$ .

Dann gilt

1.  $f \circ z^{-1} : z(U) \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph genau dann, wenn

$$\partial_{\bar{z}} f = 0.$$

Dann gilt  $\partial_z f = \partial_x f = -i\partial_y f = (f \circ z^{-1})' \circ z$ .

- 2.

$$\partial_{\bar{z}} \bar{f} = \overline{\partial_z f}.$$

- 3.

$$\partial_z f = \partial_w f \partial_z w + \partial_{\bar{w}} f \partial_z \bar{w}$$

und

$$\partial_{\bar{z}} f = \partial_{\bar{w}} f \partial_{\bar{z}} \bar{w} + \partial_w f \partial_{\bar{z}} w.$$

4. Für  $f \in C_{loc}^\infty(U, \mathbb{C})$  und  $w \circ z^{-1}$  holomorph gilt

$$\Delta_z f = \Delta_w f \cdot |\partial_z w|^2.$$

**Beweis:**

1.  $\tilde{f} := f \circ z^{-1}$  ist komplex differenzierbar in  $z_0 \in z(U)$  genau dann, wenn

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(z_0 + z) - \tilde{f}(z)}{z} \text{ existiert,}$$

also, da  $\tilde{f} \in C_{loc}^\infty$ , genau dann, wenn

$$\partial_x \tilde{f} = \frac{\partial_y \tilde{f}}{i} = -i \partial_y \tilde{f}$$

oder

$$\partial_{\bar{z}} f = \frac{1}{2}(\partial_x f + i \partial_y f) = 0.$$

In diesem Fall gilt weiter  $\tilde{f}' \circ z = \partial_x f = -i \partial_y f = \partial_z f$ .

//

2. Es gilt

$$2 \partial_{\bar{z}} \bar{f} = \partial_x \bar{f} + i \partial_y \bar{f} = \overline{\partial_x f - i \partial_y f} = 2 \overline{\partial_z f}.$$

//

3. Wir schreiben  $w = u + iv$ . Es gilt

$$\begin{aligned} 2 \partial_z f &= \left( \frac{\partial}{\partial x}(f \circ z^{-1}) - i \frac{\partial}{\partial y}(f \circ z^{-1}) \right) \circ z \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x}(f \circ w^{-1} \circ (w \circ z^{-1})) - i \frac{\partial}{\partial y}(f \circ w^{-1} \circ (w \circ z^{-1})) \right) \circ z \\ &= \partial_u f \partial_x u + \partial_v f \partial_x v - i \partial_u f \partial_y u - i \partial_v f \partial_y v \\ &= 2(\partial_u f \partial_z u + \partial_v f \partial_z v) \\ &= \partial_u f (\partial_z w + \partial_z \bar{w}) + \partial_v f (-i)(\partial_z w - \partial_z \bar{w}) \\ &= (\partial_u f - i \partial_v f) \partial_z w + (\partial_u f + i \partial_v f) \partial_z \bar{w} \\ &= 2(\partial_w f \partial_z w + \partial_{\bar{w}} f \partial_z \bar{w}). \end{aligned}$$

die Formel für  $\partial_{\bar{z}} f$  folgt aus 2. und der eben bewiesenen Formel angewandt auf  $\bar{f}$ .

//

4. Ist  $w \circ z^{-1}$  holomorph, so gilt nach 1. und 2.

$$\partial_{\bar{z}} w = \partial_z \bar{w} = 0.$$

Somit vereinfacht sich 3., und wir erhalten

$$\frac{1}{4} \Delta_z f = \partial_z \partial_{\bar{z}} f = \partial_z (\partial_{\bar{w}} f \partial_z \bar{w}) = (\partial_z \partial_{\bar{w}} f) \partial_z \bar{w} = (\partial_w \partial_{\bar{w}} f) \partial_z w \overline{\partial_z w} = \frac{1}{4} \Delta_w f |\partial_z w|^2.$$

///

**Bemerkung:**

Für eine Riemannsche Fläche ist  $h = w \circ z^{-1}$  immer holomorph, und es gilt  $|\partial_z w| > 0$ . Somit ist das Vorzeichen des Laplace-Operators für reellwertige Funktionen unabhängig von der Wahl der Karte.

□

**Proposition 2.4** *M sei eine Riemannsche Fläche.  $f \in C_{loc}^\infty(M, \mathbb{C})$  ist holomorph genau dann, wenn für die Karten  $z : U \rightarrow \mathbb{C}$  eines Atlas*

$$\partial_{\bar{z}} f = 0$$

*gilt.*

**Beweis:**

Nach Definition 2.2 ist  $f$  holomorph genau dann, wenn für jede Karte  $z : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}$  die Abbildung  $f \circ z^{-1} : z(U) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist. Nach Proposition 2.3.1. ist dies genau dann der Fall, wenn

$$\partial_{\bar{z}} f = 0.$$

Ist  $w : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine weitere Karte von  $M$ , so ist  $w \circ z^{-1}$  holomorph, nach Proposition 2.3.1. und 2.3.2. gilt  $\partial_{\bar{z}} w = \partial_z \bar{w} = 0$  und  $|\partial_{\bar{z}} \bar{w}| > 0$ . Mit Proposition 2.3.3. folgt

$$\partial_{\bar{z}} f = \partial_{\bar{w}} f \partial_{\bar{z}} \bar{w}$$

und somit

$$\partial_{\bar{z}} f = 0 \iff \partial_{\bar{w}} f = 0.$$

///

**Definition 2.6** *M sei eine Riemannsche Fläche,  $f \in C_{loc}^\infty(M, \mathbb{C})$  heisst harmonisch auf M, falls für die Karten  $z : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}$  eines Atlas*

$$\Delta_z f = 0$$

*gilt. Eine reellwertige Funktion  $f \in C_{loc}^\infty(M)$  heisst subharmonisch bzw. superharmonisch, falls für die Karten  $z : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}$  eines Atlas*

$$\Delta_z f \geq (\leq) 0.$$

*gilt.*

□

**Proposition 2.5** *M sei eine Riemannsche Fläche und  $f \in C_{loc}^\infty(M, \mathbb{C})$ . Dann ist f harmonisch genau dann, wenn der Real- und Imaginärteil von f harmonisch sind. Ist f holomorph, so ist f harmonisch.*

**Beweis:**

Für  $f = u + iv$ ,  $u, v$  reellwertig gilt  $\Delta_z f = \Delta_z u + i\Delta_z v$  und  $\Delta_z u, \Delta_z v$  sind reellwertig.

Ist  $f$  holomorph, so folgt mit Proposition 2.2 und 2.4, dass  $\frac{1}{4}\Delta_z f = \partial_z \partial_{\bar{z}} f = 0$ .

///

### 3 Metriken auf Riemannschen Flächen

**Definition 3.1**  $M$  sei eine differenzierbare  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine Riemannsche Metrik  $g$  auf  $M$  ist eine differenzierbare Abbildung im Sinne der 1. Bemerkung nach Definition 2.4 der Form

$$g : M \longrightarrow B(TM, TM; \mathbb{R})$$

mit

$$g(p) : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(p) \text{ bilinear, symmetrisch und positiv definit,}$$

d.h.  $g(p)$  ist ein Skalarprodukt auf dem Tangentialraum  $T_p M$ , für alle  $p \in M$ .

Ist  $\lambda : M \rightarrow ]0, \infty[$  eine differenzierbare Funktion, so ist  $\lambda^2 g$  wieder eine Metrik auf  $M$ . Zwei Metriken  $g, \tilde{g}$  auf  $M$  heißen konform äquivalent, falls eine differenzierbare Funktion  $\lambda : M \rightarrow ]0, \infty[$  mit

$$\tilde{g} = \lambda^2 g$$

existiert. Die Äquivalenzklassen aller zu  $g$  äquivalenten Metriken heisst konforme Klasse von  $g$ . Wir schreiben  $[g]$  dafür.

$N$  sei eine weitere,  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $f : N \rightarrow M$  eine differenzierbare Abbildung. Der Pullback  $f^*g$  von  $g$  ist definiert durch

$$(f^*g)_p(X, Y) = g_{f(p)}(df_p \cdot X, df_p \cdot Y) \quad \text{für } X, Y \in T_p N.$$

$f^*g$  ist eine Metrik auf  $N$  genau dann, wenn  $f$  eine Immersion ist, d.h. mit

$$\text{rk}(df_p) = m \quad \text{für alle } p \in N.$$

Ein Diffeomorphismus  $f : (N, \tilde{g}) \xrightarrow{\sim} (M, g)$  heisst Isometrie, falls

$$f^*g = \tilde{g},$$

bzw. konformer Isomorphismus, falls

$$[f^*g] = [\tilde{g}],$$

d.h.  $f^*g$  und  $\tilde{g}$  konform äquivalent sind.

□

#### Bemerkung:

Eine Riemannsche Metrik  $g$  auf  $M$  gibt jedem stückweise stetig differenzierbaren Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  eine Länge

$$L_g^M(\gamma) := \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} \, dt$$

und definiert auf zusammenhängendem  $M$  eine Abstandsfunktion bzw. eine Metrik durch

$$d_g^M(p, q) := \inf \left\{ L_g^M(\gamma) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow M \text{ stetig differenzierbar, } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q \right\} \quad (3.1)$$

für  $p, q \in M$ .

□

**Beispiele:**

1. Auf  $\mathbb{R}^n$  ist die kanonische Metrik gegeben durch

$$g_{can,p}(X, Y) := X^T Y \quad \text{für } X, Y \in T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$$

Für einen Diffeomorphismus  $h : U \xrightarrow{\sim} V$ ,  $U, V \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$(h^* g_{can})_p(X, Y) = g_{can,f(p)}(dh_p \cdot X, dh_p \cdot Y) = X^T dh_p^T dh_p Y.$$

Also ist  $h$  ein konformer Isomorphismus  $h : (U, g_{can}) \rightarrow (V, g_{can})$ , falls

$$dh_p^T dh_p = \lambda^2(p) \text{id} \quad (3.2)$$

mit  $\lambda(p) > 0$  für  $p \in U$ .

2. Auf  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  ist die kanonische Metrik gegeben durch

$$g_{can}(z, w) := \text{Re}(z \bar{w}).$$

□

**Proposition 3.1** *Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  gibt es zumindest eine Metrik  $g$ .*

**Beweis:**

$M$  ist als topologischer Raum ein Hausdorff-Raum und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Weiter gibt es für jedes  $p \in M$  eine Karte  $\varphi : U \subseteq M \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$  mit einer offenen Umgebung  $U$  von  $p$ , also ist  $M$  lokalkompakt. Wählen wir zu jedem  $p \in M$  eine offene Umgebung  $U(p)$ , deren Abschluss kompakt ist, so ist  $\{U(p)\}_{p \in M}$  eine offene Überdeckung von  $M$ , und, da  $M$  das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, gibt es eine abzählbare Teilüberdeckung  $\{U(p_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Setzen wir  $\Omega_k := \cup_{l=1}^k U(p_l)$  für  $k \in \mathbb{N}_0$ , so bilden  $\Omega_k \subseteq \Omega_{k+1}$  eine abzählbare offene Überdeckung mit kompakten  $\overline{\Omega_k}$ , und  $M$  ist  $\sigma$ -kompakt. Da  $\overline{\Omega_k} \subseteq M = \cup_{l=1}^{\infty} \Omega_l$ , gibt es eine endliche Teilüberdeckung  $\overline{\Omega_k} \subseteq \cup_{l=1}^{L_k} \Omega_l = \Omega_{L_k}$ , und nach Übergang zu einer Teilfolge erhalten wir  $\overline{\Omega_k} \subseteq \Omega_{k+1}$ ,  $\overline{\Omega_k}$  ist kompakt und  $M = \cup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ .

Für  $p \in M$  haben wir ein minimales  $k_p \in \mathbb{N}$  mit

$$k_p := \min\{k \in \mathbb{N} \mid p \in \overline{\Omega_k}\},$$

insbesondere gilt  $p \in \Omega_{k_p+1} - \overline{\Omega_{k_p-1}}$ , und wir wählen eine Karte  $\varphi_p : V(p) \subseteq M \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$  und offene Umgebungen  $V(p), W(p)$  von  $p$  mit

$$\overline{W(p)} \subseteq V(p) \subseteq \Omega_{k_p+1} - \overline{\Omega_{k_p-1}}.$$

Da  $\overline{\Omega_k} - \Omega_{k-1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , kompakt ist, existieren endlich viele  $p_1^k, \dots, p_{N_k}^k \in \overline{\Omega_k} - \Omega_{k-1}$  mit

$$\overline{\Omega_k} - \Omega_{k-1} \subseteq \cup_{l=1}^{N_k} W(p_l^k),$$

also

$$M = \cup_{k=1}^{\infty} (\overline{\Omega_k} - \Omega_{k-1}) \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} \cup_{l=1}^{N_k} W(p_l^k).$$

Da  $p_l^k \in \overline{\Omega_k} - \Omega_{k-1}$ , haben wir

$$k-1 \leq k_{p_l^k} \leq k$$

und

$$V(p_l^k) \subseteq \Omega_{k+1} - \overline{\Omega_{k-2}}.$$

Ist nun  $V(p_l^k) \cap V(p_{l'}^{k'}) \neq \emptyset$  mit  $k \leq k'$ , so haben wir

$$\emptyset \neq V(p_l^k) \cap V(p_{l'}^{k'}) \subseteq \Omega_{k+1} - \overline{\Omega_{k'-2}},$$

also  $k+1 > k'-2$  und  $|k-k'| \leq 2$ . Damit ist  $\{V(p_l^k)\}_{l=1, \dots, N_k, k \in \mathbb{N}}$  eine lokal endliche Überdeckung von  $M$ , d.h. zu jedem  $p \in M$  existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $p$ , die nur endliche viele der  $V(p_l^k), l = 1, \dots, N_k, k \in \mathbb{N}$  schneidet.

Da  $\varphi_{p_l^k} : V(p_l^k) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$  eine Karte ist, und  $\overline{W(p_l^k)} \subseteq V(p_l^k)$ , existiert  $\eta_{k,l} \in C_0^\infty(V(p_l^k))$  mit  $\eta_{k,l} \equiv 1$  auf  $W(p_l^k)$  und  $0 \leq \eta_{k,l} \leq 1$ . Nun ist  $g_{k,l} := \varphi_{p_l^k}^* g_{can}$  eine Metrik auf  $V(p_l^k) \subseteq M$ , und wir setzen

$$g := \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{N_k} \eta_{k,l} g_{k,l}.$$

Da  $\{V(p_l^k)\}_{l=1, \dots, N_k, k \in \mathbb{N}}$  lokal endlich ist, existiert zu jedem  $p \in M$  eine offene Umgebung  $U$  von  $p$ , die nur endliche viele der  $V(p_l^k), l = 1, \dots, N_k, k \in \mathbb{N}$ , schneidet, also ist obige Summe in  $U$  endlich, und  $g$  ist wohldefiniert und  $g : M \rightarrow T^*M \otimes T^*M$  ist differenzierbar.

$g_p$  ist eine symmetrische Bilinearform auf  $T_p M$ , und es bleibt zu zeigen, dass  $g_p$  positiv definit ist. Da  $M = \cup_{k=1}^{\infty} \cup_{l=1}^{N_k} W(p_l^k)$ , existieren  $k_0 \in \mathbb{N}, l_0 \in \{1, \dots, N_{k_0}\}$  mit  $p \in W(p_{l_0}^{k_0})$ , also  $\eta_{k_0, l_0}(p) = 1$ . Dies ergibt für  $X \in T_p M - \{0\}$ , dass

$$g(X, X) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{N_k} \eta_{k,l}(p) g_{k,l,p}(X, X) \geq g_{k_0, l_0, p}(X, X) > 0,$$

und  $g_p$  ist positiv definit, also ist  $g$  eine Metrik auf  $M$ .

///

**Proposition 3.2** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen. Eine Metrik  $g$  auf  $U$  ist konform äquivalent zur kanonischen Metrik  $g_{can}$  auf  $U \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  genau dann, wenn*

$$g_p(iz, iw) = g_p(z, w) \quad \text{für } z, w \in \mathbb{C} \text{ und } p \in U \quad (3.3)$$

**Beweis:**

Nach obiger Bemerkung (ii) gilt

$$g_{can}(iz, iw) = \operatorname{Re}(iz \overline{iw}) = \operatorname{Re}(z \bar{w}) = g_{can}(z, w).$$

Ist  $g$  konform äquivalent zu  $g_{can}$ , so gilt  $g_p = \lambda^2(p) g_{can}$  mit  $\lambda(p) > 0$ , und (3.3) folgt.

Umgekehrt: Gilt (3.3), so folgt

$$\lambda^2(p) := g_p(i, i) = g_p(1, 1) > 0$$

und

$$g_p(i, 1) = g_p(i \cdot 1, i(-i)) = g_p(1, -i) = -g_p(i, 1),$$

also  $g_p(i, 1) = 0$ . Dies ergibt

$$g_p = \lambda^2(p) g_{can}.$$

///

**Proposition 3.3** *Ein Diffeomorphismus  $h : U \xrightarrow{\sim} V$ ,  $U, V \subseteq \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend, ist ein konformer Diffeomorphismus genau dann, wenn  $h$  holomorph oder antiholomorph ist. Ist  $h$  holomorph, so gilt*

$$h^* g_{can} = |h'|^2 g_{can}. \quad (3.4)$$

**Beweis:**

$h$  ist ein konformer Isomorphismus genau dann, wenn  $h^* g_{can}$  konform äquivalent zu  $g_{can}$  ist, also

$$(h^* g_{can})_p = \lambda^2(p) g_{can} \quad (3.5)$$

für ein  $\lambda(p) > 0$  für alle  $p \in U$ . Gemäss der Definition von  $h^* g_{can}$  ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned} |dh_p.1|^2 &= \lambda^2(p) = |dh_p.i|^2, \\ dh_p.i &\perp dh_p.1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

wobei die Norm und die Orthogonalität bezüglich des Standardskalarproduktes betrachtet wird. Dies ist gleichbedeutend mit

$$dh_p.i = \pm i dh_p.1$$

bzw.

$$dh_p.(ii) = dh_p.(-1) = \pm i dh_p.i,$$

also

$$dh_p.(iz) = \pm i dh_p.z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

Da  $U$  zusammenhängend ist, bedeutet dies, dass  $h$  holomorph oder antiholomorph ist.

Ist  $h$  holomorph, so gilt  $dh_p.z = h'(p)z$ , und mit (3.5) und (3.6) folgt

$$h^* g_{can} = |h'|^2 g_{can}.$$

///

**Definition 3.2**  *$M$  sei eine differenzierbare Fläche mit fast komplexer Struktur  $J$ . Eine Metrik  $g$  auf  $M$  heisst hermitesch bezüglich  $J$ , falls*

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \quad \text{für alle } X, Y \in T_p M, p \in M.$$

*Für eine Riemannsche Fläche  $M$  heisst eine glatte Metrik  $g$  auf  $M$  hermitesch, wenn  $g$  hermitesch bezüglich der fast komplexen Struktur von  $M$  ist.*

□

**Proposition 3.4** *Jede differenzierbare Fläche mit fast komplexer Struktur  $J$  trägt zumindest eine hermitesche Metrik.*

**Beweis:**

Da  $M$  eine differenzierbare Fläche ist, trägt  $M$  eine Metrik  $\tilde{g}$ . Wir setzen

$$g(X, Y) := \tilde{g}(X, Y) + \tilde{g}(JX, JY) \quad \text{für } X, Y \in T_p M, p \in M$$

$g$  ist eine Metrik auf  $M$ , und es gilt

$$g(JX, JY) = \tilde{g}(JX, JY) + \tilde{g}(J^2 X, J^2 Y) = \tilde{g}(JX, JY) + \tilde{g}(X, Y),$$

also ist  $g$  hermitesch.

///

**Proposition 3.5**  *$M$  sei eine differenzierbare Fläche mit fast komplexer Struktur  $J$ . Die Menge der hermiteschen Metriken bezüglich  $J$ , bildet genau eine konforme Klasse von Metriken auf  $M$ .*

**Beweis:**

Für  $p \in M$  wählen wir  $X \in T_p M - \{0\}$  und  $Y := J_p X$ . Da  $J_p^2 = -\text{id}$ , hat  $J_p$  keine reellen Eigenwerte und  $\{X, Y\}$  ist linear unabhängig, also eine Basis von  $T_p M$ .

Nun sei  $g$  eine hermitesche Metrik bezüglich  $J$ , die nach Proposition 3.4 existiert. Es gilt

$$g_p(Y, Y) = g_p(J_p X, J_p X) = g_p(X, X) > 0$$

und

$$g_p(X, Y) = -g_p(J_p^2 X, J_p X) = -g_p(J_p X, X) = -g_p(Y, X) = -g_p(X, Y)$$

also  $g_p(X, Y) = 0$ .

Ist  $\tilde{g}$  eine weitere hermitesche Metrik, so setzen wir

$$\lambda^2(p) := \frac{\tilde{g}_p(X, X)}{g_p(X, X)} > 0$$

und erhalten

$$\tilde{g}_p(Y, Y) = \tilde{g}_p(X, X) = \lambda^2(p) g_p(X, X) = \lambda^2(p) g_p(Y, Y)$$

und

$$\tilde{g}_p(X, Y) = 0 = \lambda^2(p) g_p(X, Y),$$

also

$$\tilde{g}_p = \lambda^2(p) g_p$$

und  $\tilde{g}$  ist konform äquivalent zu  $g$ .

Ist umgekehrt  $\tilde{g} = \lambda^2 g$ ,  $\lambda > 0$ , also konform äquivalent zu  $g$ , so folgt für beliebige  $X, Y \in T_p(M)$

$$\tilde{g}_p(X, Y) = \lambda^2(p) g_p(X, Y) = \lambda^2(p) g_p(JX, JY) = \tilde{g}_p(JX, JY)$$

und  $\tilde{g}$  ist hermitesch.

///

**Proposition 3.6** *Es sei  $f : M \rightarrow N$  holomorph zwischen zwei Riemannschen Flächen mit  $df_p \neq 0$  für alle  $p \in M$  und  $g_N$  eine hermitesche Metrik auf  $N$ . Dann ist die Pullback-Metrik  $f^*g_N$  hermitesch auf  $M$ .*

*Insbesondere ist eine Metrik  $g$  auf einer Riemannschen Fläche hermitesch genau dann, wenn für jede Karte  $z : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}$  eines Atlas von  $M$  die Metrik*

$$(z^{-1})^*g \text{ konform äquivalent ist zu } g_{can} \text{ auf } z(U) \text{ ist.}$$

**Beweis:**

Mit Proposition 2.1 sehen wir für  $X, Y \in T_p M, p \in M$ , dass

$$\begin{aligned} (f^*g_N)(J_M X, J_M Y) &= g_N(df \circ J_M \cdot X, df \circ J_M \cdot Y) = g_N(J_N \circ df \cdot X, J_N \circ df \cdot Y) = \\ &= g_N(df \cdot X, df \cdot Y) = (f^*g_N)(X, Y), \end{aligned}$$

d.h.  $f^*g_N$  ist hermitesch auf  $M$ .

Klarerweise ist jede Metrik  $g$  hermitesch auf  $M$ , wenn  $g$  hermitesch auf jeder offenen Menge  $U \subseteq M$  einer offenen Überdeckung von  $M$  ist, z.B. den offenen Definitionsbereichen aller Karten eines Atlas von  $M$ . Nun ist jede Karte  $z : U \subseteq M \xrightarrow{\sim} z(U) \subseteq \mathbb{C}$  biholomorph, und mit dem oben Bewiesenen ist  $g$  hermitesch auf  $U$  genau dann, wenn  $(z^{-1})^*g$  hermitesch auf  $z(U)$  ist. Weiter ist mit Definition 3.2 und Proposition 3.2 die Metrik  $(z^{-1})^*g$  hermitesch auf  $z(U)$  genau dann, wenn  $(z^{-1})^*g$  konform äquivalent zur kanonischen Metrik  $g_{can}$  auf  $z(U)$  ist.

///

**Beispiele:**

1. Für die Riemannsche Fläche  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  ist die kanonische Metrik eine hermitesche Metrik, denn  $\{\text{id} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\}$  ist ein Atlas für  $\mathbb{C}$ , und  $(\text{id}^{-1})^*g_{can} = g_{can}$  ist konform äquivalent zu  $g_{can}$ . Nun folgt aus Proposition 3.6, dass die kanonische Metrik hermitesch ist.
2. Wir betrachten einen Torus  $\mathbb{C}/\Gamma$  mit  $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  für über  $\mathbb{R}$  linear unabhängige  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ . Die kanonische Metrik auf  $\mathbb{C}$  induziert über die kanonische Projektion  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$  eine Metrik  $g_{\mathbb{C}/\Gamma}$  auf  $\mathbb{C}/\Gamma$ .

Für  $U \subseteq \mathbb{C}$  mit

$$z \neq z' \in U \Rightarrow z - z' \notin \Gamma$$

ist  $(\pi|_U)^{-1} : \pi(U) \xrightarrow{\sim} U \subseteq \mathbb{C}$  eine Karte. Per Definitionem ist  $(\pi|_U)^*g_{\mathbb{C}/\Gamma} = g_{can}$ , und somit ist  $g$  nach Proposition 3.6 eine hermitesche Metrik auf  $\mathbb{C}/\Gamma$ .

3. Betrachten wir die Riemannsche Zahlenkugel  $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2 = \partial B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^3$ , so trägt  $S^2$  die zurückgezogene Metrik  $g_{S^2} := i^*g_{can}$  mit  $i : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ .

Betrachten wir die stereographische Projektion

$$T : S^2 - \{e_3\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C},$$

d.h.

$$T(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3} \right)$$

und

$$T^{-1}(w) = \left( \frac{2w}{|w|^2+1}, \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1} \right).$$

Setzen wir  $T(e_3) := \infty$ , so erhalten wir einen Homöomorphismus  $T : S^2 \xrightarrow{\approx} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Da  $|T(x_1, x_2, x_3)|^2 = (x_1^2 + x_2^2)/(1-x_3)^2 = (1-x_3^2)/(1-x_3)^2 = (1+x_3)/(1-x_3)$ , erhalten wir

$$\left(\frac{1}{z} \circ T\right)(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{x_1}{1+x_3}, \frac{-x_2}{1+x_3} \right),$$

und  $(1/z) \circ T$  und seine Inverse sind glatt, also ist  $T : S^2 \xrightarrow{\approx} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  ein Diffeomorphismus.

Für die Pushforwardmetrik  $g := (T^{-1})^* g_{S^2}$  auf  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  sehen wir mit der identischen Karte  $z := id : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , daß

$$((z^{-1})^* g)_w = \frac{4}{(|w|^2+1)^2} g_{can}$$

konform zu  $g_{can}$  ist.

Da  $1/z : \mathbb{C} - \{0\} \xrightarrow{\approx} \mathbb{C} - \{0\}$  biholomorph, also insbesondere ein konformer Diffeomorphismus ist, ist für die Karte  $1/z : \mathbb{C} \cup \{\infty\} - \{0\} \xrightarrow{\approx} \mathbb{C}$  die Metrik  $((1/z)^{-1})^* g$  auf  $\mathbb{C} - \{0\}$  auch konform zu  $g_{can}$ . Da die Metrik  $((1/z)^{-1})^* g$  auch im Ursprung glatt ist, ist die Metrik  $((1/z)^{-1})^* g$  auf ganz  $\mathbb{C}$  konform zu  $g_{can}$ .

Damit ist  $g$  ist nach Proposition 3.6 eine hermitesche Metrik auf  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

□

**Proposition 3.7** *M sei eine differenzierbare Fläche mit fast komplexer Struktur J und einer bezüglich J hermiteschen Metrik g auf M.*

*Dann ist g hermitesch bezüglich einer weiteren fast komplexen Struktur J' auf M genau dann, wenn*

$$J' = \pm J.$$

*Damit erhalten wir die Injektion*

$$\{\text{fast komplexe Struktur}\} / \sim \longrightarrow \{[g] \text{ konforme Klasse auf } M\},$$

**Beweis:**

Mit  $J$  ist auch  $-J$  eine fast komplexe Struktur auf  $M$ , und es folgt direkt aus der Definition 3.2, dass  $g$  auch bezüglich  $-J$  hermitesch ist.

Nun sei  $J'$  eine weitere fast komplexe Struktur, bezüglich der  $g$  hermitesch ist. Für  $p \in M$  wählen wir einen Einheitsvektor  $X \in T_p M$  bezüglich  $g_p$ , d.h.  $g_p(X, X) = 1$ . Dann bilden  $\{X, J_p X\}$  und  $\{X, J'_p X\}$  Orthonormalbasen von  $T_p M$  bezüglich  $g_p$ . Daraus folgt

$$J'_p X = \pm J_p X \quad \text{und} \quad J'_p J_p X = \pm J'_p J'_p X = \mp X = \pm J_p J_p X,$$

also  $J'_p = \pm J_p$ . Da  $J, J' : M \rightarrow \text{Aut}(TM)$  differenzierbar sind, und  $M$  zusammenhängend ist, folgt

$$J' = \pm J$$

///

**Bemerkungen:**

1. Für eine orientierbare Fläche  $M$  werden wir in Satz 3.1 zeigen, dass zu jeder Metrik  $g$  eine fast komplexe Struktur  $J$  auf  $M$  existiert, bezüglich der  $g$  hermitesch ist. Mit Proposition 3.5 und 3.7 erhalten wir die Bijektion

$$\{\text{fast komplexe Struktur}\}/- \rightarrow \{[g] \text{ konforme Klasse auf } M\},$$

2.  $\mathcal{A}_{\max} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}\}$  sei eine komplexe Struktur, d.h. ein maximaler Atlas aus biholomorph verträglichen Karten auf  $M$  gemäss Definition 2.1. Der zu  $\mathcal{A}_{\max}$  konjugierte Atlas ist definiert durch

$$\bar{\mathcal{A}}_{\max} := \{\bar{\varphi}_\alpha : U_\alpha \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}\}$$

und wieder eine komplexe Struktur auf  $M$ . Die zugehörigen fast komplexen Strukturen gemäss Definition 2.4 erfüllen

$$J_{\mathcal{A}_{\max}} = -J_{\bar{\mathcal{A}}_{\max}}.$$

□

Umgekehrt konstruieren wir zu jeder Metrik auf einer orientierbaren Fläche eine komplexe Struktur.

**Satz 3.1**  *$M$  sei eine orientierbare differenzierbare Fläche. Dann bestehen die Bijektionen*

$$\begin{array}{ccc} \{\text{komplexe Strukturen auf } M\}/- & & \\ \updownarrow & \swarrow \quad \searrow & \\ \{\text{fast komplexe Strukturen auf } M\}/- & & \{[g] \text{ konforme Klassen auf } M\} \end{array}$$

□

**Bemerkung:**

Dabei meinen komplexe Strukturen auf  $M$  als differenzierbare Fläche komplexe Strukturen, die aus Karten des differenzierbaren Atlas von  $M$  bestehen.

□

Zum Beweis des Satzes benötigen wir folgendes Lemma.

**Lemma 3.8** *Es sei  $V \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $g$  eine  $C^m$ -Metrik,  $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  auf  $V$ ,  $m \geq 2$ , und  $z \in V$ . Dann existiert ein  $C^m$ -Diffeomorphismus  $h : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \in \tilde{V} \subseteq V$  mit*

$$(h^{-1})^*g \text{ ist konform äquivalent zu } g_{can} \text{ auf } h(\tilde{V}), \\ \det dh > 0.$$

**Beweis:**

$(h^{-1})^*g$  ist konform äquivalent zu  $g_{can}$ , d.h.  $(h^{-1})^*g = \lambda^2 g_{can}$ , genau dann, wenn

$$\lambda^2 \delta_{kl} = \lambda^2 g_{can}(e_k, e_l) = g(dh^{-1}.e_k, dh^{-1}.e_l).$$

Fassen wir  $g$  als positiv definite  $2 \times 2$ -Matrix auf, so heisst dies

$$(dh^{-1})^T g dh^{-1} = \lambda^2 \text{id}$$

bzw.

$$dh g^{-1} dh^T = \lambda^{-2} \text{id}. \quad (3.7)$$

Schreiben wir  $h = (u \ v)^T$ , so gilt

$$dh = \begin{pmatrix} \nabla u \\ \nabla v \end{pmatrix}$$

und (3.7) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \nabla u g^{-1} (\nabla u)^T &= \nabla v g^{-1} (\nabla v)^T \neq 0, \\ \nabla v g^{-1} (\nabla u)^T &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

da  $h$  ein Diffeomorphismus ist, also insbesondere  $\nabla u, \nabla v \neq 0$ . (3.8) bedeutet, dass  $\nabla v$  durch eine  $90^\circ$ -Drehung bezüglich des Skalarproduktes  $g^{-1}$  aus  $\nabla u$  hervorgeht. Andererseits folgt aus der zweiten Identität in (3.8), dass

$$(\nabla v)^T \perp g^{-1}(\nabla u)^T,$$

also

$$(\nabla v)^T = \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g^{-1} (\nabla u)^T \quad \text{für ein } \alpha \neq 0. \quad (3.9)$$

Dies ergibt

$$\nabla v g^{-1} (\nabla v)^T = \alpha^2 \nabla u g^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} g^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g^{-1} (\nabla u)^T.$$

Schreiben wir

$$g_{kl} := g(e_k, e_l), \quad \det(g) = \det(g_{kl}), \quad \text{und} \quad g^{kl} = (g^{-1})_{kl},$$

so rechnen wir

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} g^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g^{-1} = \begin{pmatrix} g^{12} & g^{22} \\ -g^{11} & -g^{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -g^{12} & -g^{22} \\ g^{11} & g^{12} \end{pmatrix} = (\det g^{-1}) \text{id}$$

und erhalten

$$\nabla v g^{-1} (\nabla v)^T = \alpha^2 (\det g^{-1}) \nabla u g^{-1} (\nabla u)^T.$$

Aus der ersten Identität in (3.8) folgt

$$\alpha = \pm \sqrt{\det g}.$$

Somit ist (3.8) äquivalent zu

$$\begin{aligned} \partial_1 v &= \mp \sqrt{\det g} g^{2l} \partial_l u, \\ \partial_2 v &= \pm \sqrt{\det g} g^{1l} \partial_l u. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Wählen wir die oberen Vorzeichen, so erhalten wir zusätzlich  $\det dh > 0$ , falls  $\nabla u \neq 0$ .

(3.10) hat auf einer einfach zusammenhängenden, offenen Menge  $\tilde{V}$  eine  $C^2$ -Lösung genau dann, wenn

$$\partial_{21} v = \partial_{12} v,$$

d.h. wenn

$$-\partial_k (\sqrt{\det g} g^{kl} \partial_l u) = 0 \quad \text{auf } \tilde{V}. \tag{3.11}$$

Das Lemma ist bewiesen, wenn wir zeigen, dass ein

$$u \in C_{loc}^m(B_\varrho(z), \mathbb{R}) \quad \text{für ein } \varrho > 0, B_\varrho(z) \subseteq V,$$

existiert, das (3.11) auf  $B_\varrho(z)$  erfüllt und

$$\nabla u(z) \neq 0. \tag{3.12}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $z = 0 \in V$ . Wir setzen

$$a_{kl}^\varrho(w) = \sqrt{\det g(\varrho w)} g^{kl}(\varrho w) \quad \text{für } w \in \overline{B_1(0)}$$

und sehen  $a_{kl}^\varrho \in C^m(\overline{B_1(0)}, \mathbb{R}) \subseteq C^{m-1,1/2}(\overline{B_1(0)}, \mathbb{R})$ .

Mit Standardtheorie für elliptische Gleichungen, siehe [GT] Theorem 6.14 und 6.19, existiert eine eindeutige Lösung  $u_\varrho \in C^{m,1/2}(\overline{B_1(0)}, \mathbb{R})$  des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\partial_k (a_{kl}^\varrho \partial_l u_\varrho) &= 0 & \text{in } B_1(0), \\ u_\varrho(x, y) &= x & \text{für } (x, y) \in \partial B_1(0). \end{aligned}$$

Aus dem Maximumprinzip, siehe [GT] Corollary 3.2, folgt

$$|u_\varrho| \leq 1 \quad \text{auf } B_1(0)$$

und mit den Schauder-Abschätzungen, siehe [GT] Theorem 6.6 und 6.19,

$$\|u_\varrho\|_{C^{m,1/2}(B_1(0))} \leq C_m$$

somit konvergiert für eine Teilfolge  $\varrho_j \rightarrow 0$

$$u_{\varrho_j} \longrightarrow \bar{u} \quad \text{in } C^2(\overline{B_1(0)}),$$

da  $m \geq 2$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} -\partial_k(\sqrt{\det g(0)} g^{kl}(0) \partial_l \bar{u}) &= 0 & \text{in } B_1(0), \\ \bar{u}(x, y) &= x & \text{für } (x, y) \in \partial B_1(0). \end{aligned}$$

Dieses Randwertproblem hat neben  $\bar{u}$  noch die lineare Lösung  $(x, y) \mapsto x$ . Da die Lösung eindeutig ist, siehe [GT] Theorem 3.3, folgt  $\bar{u}(x, y) = x$ .

Obige Konvergenz ergibt

$$\nabla u_{\varrho_j}(0) \longrightarrow \nabla \bar{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Somit existiert ein  $\varrho > 0$  mit  $\nabla u_{\varrho}(0) \neq 0$ . Setzen wir

$$u(w) := u_{\varrho}(\varrho^{-1}w) \quad \text{für } w \in B_{\varrho}(0),$$

so erfüllt  $u$  (3.11) und (3.12), und das Lemma ist bewiesen.

///

### Bemerkung:

Das obige Lemma gilt auch für  $m = 1$ .

□

### Beweis von Satz 3.1

Mit Definition 2.4 haben wir die Abbildung

$$\mathcal{J} : \{\text{komplexe Struktur auf } M\} \longrightarrow \{\text{fast komplexe Struktur auf } M\}$$

und mit Proposition 3.7 die Injektion

$$[\ ] : \{\text{fast komplexe Struktur auf } M\} / \sim \longrightarrow \{[g] \text{ konforme Klasse auf } M\}$$

mit  $[\ ]_J := \{g \text{ hermitesche Metrik auf } M \text{ bezüglich } J\}$ .

Wir zeigen zunächst folgende Behauptungen:

1.  $[\ ] \circ \mathcal{J}$  ist surjektiv, d.h. zu jeder Metrik  $g$  auf  $M$  existiert eine komplexe Struktur  $\mathcal{A}_{\max}$  auf  $M$ , so dass  $g$  hermitesch bezüglich  $J_{\mathcal{A}_{\max}}$  ist.
2.  $[\ ]$  ist bijektiv.
3.  $\mathcal{J}$  ist surjektiv.
4.  $\mathcal{J}$  ist injektiv.

### Beweis von Behauptung 1.:

Sei  $g$  eine Metrik auf  $M$  und  $\mathcal{A}_0$  ein orientierter differenzierbarer Atlas auf  $M$ , siehe Definition 1.1.

Wir wählen  $p \in M$  und eine Karte  $\varphi_{\alpha} \in \mathcal{A}_0$ ,

$$\varphi_{\alpha} : U \subseteq M \longrightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \quad \text{mit } p \in U.$$

Wir setzen  $V := \varphi_\alpha(U) \subseteq \mathbb{C}$ ,  $z := \varphi_\alpha(p) \in V$  und betrachten die Metrik  $(\varphi_\alpha^{-1})^*g$  auf  $V$ .

Nach Lemma 3.8 existiert ein Diffeomorphismus  $h : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{C}, z \in \tilde{V} \subseteq V$  mit

$$(h^{-1})^*((\varphi_\alpha^{-1})^*g) \text{ ist konform äquivalent zu } g_{can} \text{ auf } h(\tilde{V}), \\ \det dh > 0.$$

Wir setzen  $U_p := \varphi_\alpha^{-1}(\tilde{V})$  und  $\psi_p := h \circ \varphi_\alpha : U_p \rightarrow \mathbb{C}$ . Da  $z \in \tilde{V}$ , gilt  $p \in U_p$ , und, da  $\det dh > 0$ , ist  $\psi_p$  eine Karte des orientierten Atlas  $\mathcal{A}_0$ . Weiter gilt:

$$(\psi_p)^*g \text{ ist konform äquivalent zu } g_{can} \text{ auf } \psi_p(U_p), \quad (3.13)$$

also existiert  $\eta_p : \psi_p(U_p) \rightarrow ]0, \infty[$  mit

$$(\psi_p^{-1})^*g = \eta_p g_{can} \text{ auf } \psi_p(U_p). \quad (3.14)$$

Wir setzen

$$\mathcal{A} := \{\psi_p : U_p \rightarrow \mathbb{C}\} \subseteq \mathcal{A}_0.$$

Da  $M = \bigcup_{p \in M} U_p$ , ist  $\mathcal{A}$  ein orientierter differenzierbarer Atlas auf  $M$ .

Für  $p, q \in M$  ist die Übergangsabbildung

$$h_{pq} := \psi_q \circ \psi_p^{-1} : U_{pq} := \psi_p(U_p \cap U_q) \rightarrow U_{qp} := \psi_q(U_p \cap U_q)$$

ein positiv orientierter Diffeomorphismus.

Mit (3.14) erhalten wir

$$\begin{aligned} h_{pq}^*g_{can} &= h_{pq}^* \left( \frac{1}{\eta_q} (\psi_q^{-1})^*g \right) = \frac{1}{\eta_q \circ h_{pq}} (\psi_q^{-1} \circ h_{pq})^*g = \\ &= \frac{1}{\eta_q \circ h_{pq}} (\psi_p^{-1})^*g = \frac{\eta_p}{\eta_q \circ h_{pq}} g_{can} \text{ auf } U_{pq}, \end{aligned}$$

also ist  $h_{pq}$  ein konformer Diffeomorphismus, und somit nach Proposition 3.3 auf den Komponenten von  $U_{pq}$  holomorph bzw. antiholomorph. Da  $h_{pq}$  positiv orientiert ist, ist  $h_{pq}$  holomorph. Damit ist  $\mathcal{A}$  ein komplexer Atlas und definiert eine fast komplexe Struktur  $J = J_{\mathcal{A}_{\max}}$ . Mit (3.13) und Proposition 3.6 ist  $g$  hermitesch bezüglich  $J$ .

//

**Beweis** von Behauptung 2.:

Nach Proposition 3.7 ist  $[\ ]$  injektiv und aus 1. folgt, dass  $[\ ]$  surjektiv ist.

//

**Beweis** von Behauptung 3.:

Dazu sei  $J$  eine fast komplexe Struktur auf  $M$  und  $g$  eine bezüglich  $J$  hermitesche Metrik, die nach Proposition 3.4 existiert.

Nach 1. existiert eine komplexe Struktur  $\mathcal{A}_{\max}$  auf  $M$ , so dass  $g$  hermitesch bezüglich  $J_{\mathcal{A}_{\max}}$  ist. Nach Proposition 3.7 folgt

$$J = \pm J_{\mathcal{A}_{\max}}.$$

Nach Bemerkung 2. nach Proposition 3.7 ist  $\bar{\mathcal{A}}_{\max}$  wieder eine komplexe Struktur, und es gilt

$$J_{\bar{\mathcal{A}}_{\max}} = -J_{\mathcal{A}_{\max}},$$

also

$$J = J_{\mathcal{A}_{\max}} \quad \text{oder} \quad J = J_{\bar{\mathcal{A}}_{\max}},$$

und  $\mathcal{J}$  ist surjektiv.

//

**Beweis** von Behauptung 4.:

$\mathcal{A}_{\max}$  und  $\mathcal{A}'_{\max}$  seien zwei komplexe Strukturen mit

$$J = J_{\mathcal{A}_{\max}} = J_{\mathcal{A}'_{\max}}$$

Es sei  $z : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}$  eine Karte von  $\mathcal{A}_{\max}$  und  $w : V \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}$  eine Karte von  $\mathcal{A}'_{\max}$ . Es gilt

$$dz \circ J = i \cdot dz \quad \text{und} \quad dw \circ J = i \cdot dw$$

Dann folgt für die Übergangsabbildung

$$d(w \circ z^{-1})i = dw \cdot (dz)^{-1}i = dw \circ J \circ (dz)^{-1} = i \cdot d(w \circ z^{-1})$$

und somit ist diese holomorph und mit Symmetrie biholomorph. Da die komplexen Strukturen maximal sind, folgt

$$z, w \in \mathcal{A}_{\max}, \mathcal{A}'_{\max}$$

und

$$\mathcal{A}_{\max} = \mathcal{A}'_{\max}$$

//

Da

$$J_{\bar{\mathcal{A}}_{\max}} = -J_{\mathcal{A}_{\max}},$$

bemerken wir schliesslich, dass  $\mathcal{J}$  zu einer Bijektion

$$\{\text{komplexe Struktur auf } M\}/- \quad \longleftrightarrow \quad \{\text{fast komplexe Struktur auf } M\}/-$$

faktorisiert.

///

**Korollar 3.2** *M sei eine differenzierbare Fläche. Dann ist*

$$\mathcal{J} : \{\text{komplexe Struktur auf } M\} \longrightarrow \{\text{fast komplexe Struktur auf } M\}$$

*eine Bijektion.*

**Beweis:**

Wenn  $M$  orientierbar ist, haben wir dies bereits im Beweis von Satz 3.1 gezeigt.

Eine Riemannsche Fläche ist orientierbar, da ein komplexer Atlas orientiert ist, da nicht-konstante holomorphe Abbildungen positiv orientierte Diffeomorphismen sind.

Genauso zeigen wir, dass eine Fläche  $M$ , die eine fast komplexe Struktur  $J$  trägt, orientierbar ist. Dazu wählen wir Karten  $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $U$  offen und zusammenhängend. Für  $p \in U$  ist

$$J_{\varphi,p} := d\varphi_p \circ J_p \circ d\varphi_p^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

ein Automorphismus von  $\mathbb{R}^2$  mit  $J_{\varphi,p}^2 = -\text{id}$ .

Somit ist für  $X \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$  beliebig

$$\det(X, J_{\varphi,p}X) \neq 0.$$

Da  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  und  $U$  zusammenhängend sind, folgt

$$\text{sgn} \det(X, J_{\varphi,p}X) = \pm 1 \quad \text{für alle } X \in \mathbb{R}^2 - \{0\} \text{ und } p \in U. \quad (3.15)$$

Betrachten wir die Karte

$$\bar{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

so gilt

$$J_{\bar{\varphi},p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \circ d\varphi_p \circ J_p \circ (d\varphi_p)^{-1} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} J_{\varphi,p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und für  $X \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$  folgt

$$\begin{aligned} \det(X, J_{\bar{\varphi},p}X) &= \det\left(X, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} J_{\varphi,p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X\right) = \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Y, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} J_{\varphi,p} Y\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \det(Y, J_{\varphi,p}Y) = \\ &= -\det(Y, J_{\varphi,p}Y), \end{aligned}$$

also

$$\text{sgn} \det(X, J_{\bar{\varphi},p}X) = -\text{sgn} \det(Y, J_{\varphi,p}Y) = -\text{sgn} \det(X, J_{\varphi,p}X).$$

Damit ist

$$\mathcal{A} := \{\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ Karte} \mid U \text{ zusammenhängend; } \varphi \text{ erfüllt (3.15) mit } +1\}$$

ein differenzierbarer Atlas von  $M$ . Für zwei Karten  $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$  und für die Übergangsabbildung  $h := \psi \circ \varphi^{-1}$  gilt

$$dh \circ J_\varphi = d\psi \circ d\varphi^{-1} \circ J_\varphi = d\psi \circ J \circ d\varphi^{-1} = J_\psi \circ d\psi \circ d\varphi^{-1} = J_\psi \circ dh.$$

Dann folgt für  $X \in \mathbb{R}^2 - \{0\}, Y = dh.X \neq 0$ , dass

$$\det(dh) \cdot \det(X, J_\varphi X) = \det(dh.X, dh.J_\varphi X) = \det(dh.X, J_\psi dh.X) = \det(Y, J_\psi Y),$$

also

$$\det(dh) = \frac{\det(Y, J_\psi Y)}{\det(X, J_\varphi X)} > 0.$$

Damit ist  $\mathcal{A}$  ein orientierter Atlas von  $M$  und  $M$  orientierbar.

///

### Beispiel

Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  eine differenzierbare orientierbare zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$ .  $\nu : M \rightarrow \partial B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^3$  eine differenzierbare Einheitsnormale.

Wir definieren  $J : TM \rightarrow TM$  durch

$$J_p X := \nu(p) \times X \quad \text{für } X \in T_p M, p \in M.$$

Es gilt  $\nu(p) \cdot \nu(p) \times X = 0$ , also  $J_p X \in T_p M$ . Da  $\nu(p)$  und  $X$  orthogonal sind, bilden

$$\left\{ \nu(p), \frac{X}{|X|}, \nu(p) \times \frac{X}{|X|} \right\}$$

eine positiv orientierte Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^3$ . Daher ist auch

$$\left\{ \nu(p), \nu(p) \times \frac{X}{|X|}, -\frac{X}{|X|} \right\}$$

eine positiv orientierte Orthonormalbasis. Daraus folgt

$$J_p^2 X = \nu(p) \times (\nu(p) \times X) = -X,$$

also  $J^2 = -\text{id}$  und  $J$  ist eine fast komplexe Struktur auf  $M$ . Nach Korollar 3.2 ist  $M$  somit eine Riemannsche Fläche. Die zurückgezogene Metrik ist eine hermitesche Metrik.

□

## 4 Die Sätze von Gauß-Bonnet und Riemann-Hurwitz

**Definition 4.1** *M sei eine Riemannsche Fläche und  $g$  eine hermitesche Metrik auf  $M$ . Der Laplace-Operator  $\Delta_g : C_{loc}^\infty(M, \mathbb{C}) \rightarrow C_{loc}^\infty(M, \mathbb{C})$ , das Flächenmass  $\mu_g \in \mathcal{M}^+(M)$ , d.h.  $\mu_g$  ist ein positives Mass auf  $M$ , und die Gauß-Krümmung  $K_g : M \rightarrow \mathbb{R}$  bezüglich  $g$  sind lokal für eine Karte  $z : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}$  wie folgt definiert:*

*Nach Proposition 3.6 ist  $z^*g_{can}$  konform äquivalent zu  $g$ , d.h.*

$$g = \lambda^2 z^*g_{can} \quad \text{auf } U$$

*für eine glatte Funktion  $\lambda : U \rightarrow ]0, \infty[$ . Wir definieren*

$$\begin{aligned} \Delta_g &:= \frac{1}{\lambda^2} \Delta_z = \frac{4}{\lambda^2} \partial_z \partial_{\bar{z}}, \\ \mu_g &:= \lambda^2 \cdot z^{-1}(\mathcal{L}^2|_{z(U)}), \\ K_g &:= -\Delta_g \log \lambda, \end{aligned}$$

*hier bezeichnet  $\mathcal{L}^2$  das zweidimensionale Lebesguemass auf  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  und*

$$z^{-1}(\mathcal{L}^2|_{z(U)})(A) := \mathcal{L}^2(z(A) \cap z(U))$$

*ist das Bildmass von  $\mathcal{L}^2$ .*

□

Zuerst zeigen wir, dass obige Definitionen nicht von der Wahl der Karte  $z : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}$  abhängen.

**Proposition 4.1** *M sei eine Riemannsche Fläche und  $g$  eine hermitesche Metrik auf  $M$ . Dann sind  $\Delta_g$ ,  $\mu_g$  und  $K_g$  aus Definition 4.1 wohldefiniert auf  $M$ .*

**Beweis:**

Es seien

$$z : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}, \quad w : V \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}$$

zwei Karten. Insbesondere ist

$$h := w \circ z^{-1} : z(U \cap V) \rightarrow w(U \cap V)$$

biholomorph.

Nach Proposition 3.6 existieren glatte Funktionen

$$\lambda, \eta : U \cap V \rightarrow ]0, \infty[ \quad \text{mit} \quad \lambda^2 z^*g_{can} = g = \eta^2 w^*g_{can} \quad \text{auf } U \cap V,$$

zuerst folgt mit Proposition 3.3

$$(\lambda^2 \circ z^{-1})g_{can} = (z^{-1})^*g = (\eta^2 \circ z^{-1}) \cdot h^*g_{can} = (\eta^2 \circ z^{-1}) \cdot |h'|^2 g_{can} \quad (4.1)$$

und mit Proposition 2.3.1. gilt  $|h'| \circ z = |\partial_z w|$  und

$$\lambda^2 = |\partial_z w|^2 \cdot \eta^2.$$

Aus Proposition 2.3.4 folgt

$$\frac{1}{\lambda^2} \Delta_z = \frac{|\partial_z w|^2}{\lambda^2} \Delta_w = \frac{1}{\eta^2} \Delta_w,$$

und  $\Delta_g$  ist wohldefiniert.

Mit dem Transformationssatz folgt

$$h^{-1}(\mathcal{L}^2|_{w(U \cap V)}) = |\det dh| \cdot (\mathcal{L}^2|_{z(U \cap V)}),$$

und, da  $h$  holomorph ist, gilt

$$|\det dh| = |h'|^2 = |\partial_z w|^2 \circ z^{-1}.$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} \eta^2 \cdot w^{-1}(\mathcal{L}^2|_{w(U \cap V)}) &= \eta^2 \cdot (h \circ z)^{-1}(\mathcal{L}^2|_{w(U \cap V)}) = \eta^2 \cdot z^{-1}(|h'|^2 \mathcal{L}^2|_{z(U \cap V)}) \\ &= \eta^2 |\partial_z w|^2 \cdot z^{-1}(\mathcal{L}^2|_{z(U \cap V)}) = \lambda^2 \cdot z^{-1}(\mathcal{L}^2|_{z(U \cap V)}), \end{aligned}$$

und  $\mu_g$  ist mit abzählbarer Überdeckung, die mit dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom existiert, wohldefiniert.

Mit  $h$  ist auch  $h'$  holomorph. Damit ist  $\log |h'|$  harmonisch auf  $z(U \cap V) \subseteq \mathbb{C}$ , d.h.

$$\Delta \log |h'| = (\partial_1^2 + \partial_2^2) \log |h'| = 0,$$

bzw.

$$\Delta_g \log |\partial_z w| = \frac{1}{\lambda^2} \Delta_z \log |\partial_z w| = \frac{1}{\lambda^2} (\Delta \log |h'|) \circ z = 0.$$

Daraus folgt

$$-\Delta_g \log \lambda = -\Delta_g (\log \eta + \log |\partial_z w|) = -\Delta_g \log \eta,$$

und die Gauß-Krümmung ist wohldefiniert.

///

### Beispiele:

1. Für  $M = \mathbb{C}$  und  $M = \mathbb{C}/\Gamma$  und ihre in § 3 beschriebenen hermiteschen Metriken  $g_{\mathbb{C}/\Gamma}$  gilt

$$(z^{-1})^* g_{\mathbb{C}/\Gamma} = g_{can}$$

für Karten  $z$ . Somit gilt

$$K_{g_{\mathbb{C}/\Gamma}} \circ z = \frac{-1}{2} \Delta \log 1 = 0,$$

und die Gauß-Krümmung verschwindet.

2. Für  $S^2$  mit der hermiteschen Metrik  $g_{S^2}$  aus der 3. Bemerkung nach Proposition 3.6 gilt für die stereographische Karte  $z : S^2 - \{e_3\} \xrightarrow{\approx} \mathbb{C}$

$$((z^{-1})^* g)_w = \frac{4}{(|w|^2 + 1)^2} g_{can}.$$

Dies ergibt

$$K_g \circ z = -\frac{(|w|^2 + 1)^2}{8} \Delta \log \left( \frac{4}{(|w|^2 + 1)^2} \right) = 1,$$

und die Gauß-Krümmung ist konstant  $\equiv 1$ .

3. Auf der oberen Halbebene  $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$  heisst  $g_{\mathcal{H}} := \operatorname{Im}(z)^{-2} g_{\text{can}}$  die hyperbolische Metrik. Dies ist konform zur kanonischen Metrik, also hermitesch. Es gilt

$$K_{g_{\mathcal{H}}}(z) = -\Delta_{g_{\mathcal{H}}} \log(\operatorname{Im}(z)^{-1}) = y^2 \Delta_z \log y = y^2 \partial_y (1/y) = -1,$$

und die Gauß-Krümmung ist konstant  $K_{g_{\mathcal{H}}} \equiv -1$ .

Die gebrochen linearen Abbildungen  $\varphi_{\alpha} : z \mapsto z + \alpha$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_{\lambda} : z \mapsto \lambda z$  mit  $\lambda > 0$  und  $-I : z \mapsto -1/z$  bilden die obere Halbebene  $\mathcal{H}$  auf sich selbst ab. Klarerweise ist die Translation eine Isometrie von  $g_{\mathcal{H}}$ . Mit Proposition 3.3 rechnen wir für die Streckung

$$\begin{aligned} (\varphi_{\lambda}^* g_{\mathcal{H}})(z) &= \operatorname{Im}(\varphi_{\lambda}(z))^{-2} |\varphi'_{\lambda}(z)|^2 g_{\text{can}}(z) = \\ &= \operatorname{Im}(\lambda z)^{-2} \lambda^2 g_{\text{can}}(z) = \operatorname{Im}(z)^{-2} g_{\text{can}}(z) = g_{\mathcal{H}}(z) \end{aligned}$$

und für die Inversion

$$\begin{aligned} (-I^* g_{\mathcal{H}})(z) &= \operatorname{Im}(-I(z))^{-2} |-I'(z)|^2 g_{\text{can}}(z) = \operatorname{Im}(1/z)^{-2} |1/z^2|^2 g_{\text{can}}(z) = \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)^{-2} |z|^{-4} g_{\text{can}}(z) = \operatorname{Im}(\bar{z})^{-2} g_{\text{can}}(z) = \operatorname{Im}(z)^{-2} g_{\text{can}}(z) = g_{\mathcal{H}}(z), \end{aligned}$$

also sind die Streckung und die negative Inversion auch Isometrien von  $g_{\mathcal{H}}$ . Da alle biholomorphen Abbildungen der oberen Halbebene gebrochen lineare Abbildungen sind, die die obere Halbebene auf sich abbilden, siehe [Ru] Theorem 12.6 oder [Sch-b] Proposition 3.6, und diese von  $\varphi_{\alpha}$ ,  $\varphi_{\lambda}$  und  $I$  erzeugt werden, sind alle biholomorphen Abbildungen der oberen Halbebene Isometrien von  $g_{\mathcal{H}}$ . Da weiter alle konformen Diffeomorphismen der oberen Halbebene mit Proposition 3.3 bis auf negative Konjugation  $\varphi : z \mapsto -\bar{z}$  biholomorph sind, und

$$\begin{aligned} (\varphi^* g_{\mathcal{H}})(z) &= \operatorname{Im}(\varphi(z))^{-2} (\varphi^* g_{\text{can}})(z) = \operatorname{Im}(-\bar{z})^{-2} g_{\text{can}}(z) = \\ &= \operatorname{Im}(z)^{-2} g_{\text{can}}(z) = g_{\mathcal{H}}(z), \end{aligned}$$

sind alle konformen Automorphismen von  $(\mathcal{H}, g_{\mathcal{H}})$  Isometrien.

4. Die gebrochen lineare Abbildung  $\varphi : z \mapsto -i(z+1)/(z-1)$  bildet den Einheitsball  $D := B_1(0)$  biholomorph auf die obere Halbebene  $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$  ab. Der Pullback der hyperbolischen Metrik ergibt sich mit Proposition 3.3 als

$$\begin{aligned} (\varphi^* g_{\mathcal{H}})(z) &= \operatorname{Im}(\varphi(z))^{-2} (\varphi^* g_{\text{can}})(z) = \operatorname{Im}(\varphi(z))^{-2} |\varphi'(z)|^2 g_{\text{can}} = \\ &= \left(-\operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right)^{-2} \cdot \left|\frac{2i}{(z-1)^2}\right|^2 g_{\text{can}} = \\ &= 4 \left(\operatorname{Re}((z+1)(\bar{z}-1))\right)^{-2} g_{\text{can}} = \frac{4}{(1-|z|^2)^2} g_{\text{can}} =: g_{\text{poin}}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

den wir die Poincaré-Metrik auf  $D$  nennen. Mit Proposition 4.1 und dem vorigen Beispiel ist die Gauß-Krümmung konstant  $K_{g_{\text{poin}}} \equiv -1$ . Da die gebrochen lineare Abbildung ein konformer Diffeomorphismus ist, erhalten wir weiter aus dem vorigen Beispiel, alle konformen Automorphismen von  $(D, g_{\text{poin}})$  sind Isometrien.

5. Die Abbildung  $\pi : w \mapsto e^{iw}$  bildet  $\mathcal{H}$  holomorph auf  $D - \{0\} =: \dot{D}$  ab und ist lokal biholomorph. Genauer ist für  $\alpha \in \mathbb{R}$  die Einschränkung

$$\pi|[\alpha, \alpha + 2\pi[ \times ]0, \infty[ \xrightarrow{\sim} D - \{re^{i\alpha} | 0 < r < 1\},$$

und  $\pi$  ist eine Überlagerungsprojektion, d.h. zu jedem  $z \in \dot{D}$  existiert eine offene Umgebung  $U(z) \subseteq \dot{D}$  von  $z$  mit  $\pi^{-1}(U(z)) = \sum_j V_j$  und  $V_j$  offen und  $\pi|V_j \xrightarrow{\sim} U(z)$ . Da  $\mathcal{H}$  einfach zusammenhängend ist, ist  $\pi : \mathcal{H} \rightarrow \dot{D}$  die universelle Überlagerung der punktierten Kreisscheibe. Die horizontalen Translationen  $\tau_k : w \mapsto w + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ , sind Decktransformationen, d.h.  $\pi \circ \tau_k = \pi$ , und operieren transitiv auf den Fasern, also sind dies alle Decktransformationen. Da  $\tau_k$  Isometrien auf  $\mathcal{H}$  mit der hyperbolischen Metrik sind, erzeugt  $\pi$  eine Pushforward-Metrik  $\pi_* g_{\mathcal{H}}$  auf  $\dot{D}$ . Genauer ist  $z \mapsto -i \log z$  eine lokale Inverse von  $\pi$ , und wir rechnen mit Proposition 3.3

$$\begin{aligned} g_{\dot{D}}(z) &:= (\pi_* g_{\mathcal{H}})(z) = (-i \log z)^* g_{\mathcal{H}} = \\ &= (Im(-i \cdot \log z))^{-2} | -i \log' z|^2 g_{can} = \frac{1}{|z|^2 (\log |z|)^2} g_{can}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Weiter ist die Gauß-Krümmung konstant  $K_{\pi_* g_{\mathcal{H}}} \equiv -1$ .

□

**Proposition 4.2** *M sei eine Riemannsche Fläche und  $g, \tilde{g}$  zwei hermitesche Metriken auf  $M$ , also nach Proposition 3.5*

$$\tilde{g} = \eta^2 g$$

für ein glattes  $\eta : M \rightarrow ]0, \infty[$ . Dann gelten

$$\begin{aligned} \Delta_{\tilde{g}} &= \frac{1}{\eta^2} \Delta_g \\ \mu_{\tilde{g}} &= \eta^2 \mu_g \\ K_{\tilde{g}} &= \frac{1}{\eta^2} K_g - \frac{1}{\eta^2} \Delta_g \log \eta. \end{aligned}$$

**Beweis:**

Es genügt, die Proposition lokal zu beweisen. Dazu sei  $z : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}$  eine Karte von  $M$ , und es gilt gemäss Proposition 3.6

$$g = \lambda^2 z^* g_{can}$$

für ein  $\lambda : U \rightarrow ]0, \infty[$  und

$$\tilde{g} = \eta^2 \lambda^2 z^* g_{can}.$$

Nach Definition 4.1 gilt

$$\begin{aligned} \Delta_{\tilde{g}} &= \frac{1}{\eta^2 \lambda^2} \Delta_z = \frac{1}{\eta^2} \Delta_g, \\ \mu_{\tilde{g}} &= \lambda^2 \eta^2 \cdot z^{-1}(\mathcal{L}^2|_{z(U)}) = \eta^2 \mu_g, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} K_{\tilde{g}} &= -\Delta_{\tilde{g}} \log(\lambda \eta) = -\frac{1}{\eta^2} \Delta_g \log \lambda - \frac{1}{\eta^2} \Delta_g \log \eta \\ &= \frac{1}{\eta^2} K_g - \frac{1}{\eta^2} \Delta_g \log \eta. \end{aligned}$$

///

Somit unterscheiden sich  $\Delta_g$  und  $\Delta_{\tilde{g}}$  nur um einen positiven Faktor. Für harmonische Funktionen ergibt sich folgende Äquivalenz.

**Proposition 4.3** *M sei eine Riemannsche Fläche.  $f \in C_{loc}^\infty(M, \mathbb{C})$  ist harmonisch auf M genau dann, wenn für eine und somit jede hermitesche Metrik g auf M*

$$\Delta_g f = 0.$$

*Eine reellwertige Funktion  $f \in C_{loc}^\infty(M)$  ist subharmonisch bzw. superharmonisch genau dann, wenn für eine und somit jede hermitesche Metrik g auf M*

$$\Delta_g f \geq (\leq) 0.$$

**Beweis:**

Dies folgt sofort aus Definition 2.6 und 4.1, da für jede Karte  $z : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}$

$$\Delta_g = \frac{1}{\lambda^2} \Delta_z$$

und  $\lambda > 0$  ist.

///

Bevor wir zum Satz von Gauß-Bonnet kommen, brauchen wir folgende Definition.

**Definition 4.2** *Ein verallgemeinertes Dreieck in  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  ist eine Jordankurve  $\gamma := \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3$ , die aus drei stetig differenzierbaren, regulär parametrisierten Wegen  $\gamma_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  mit*

$$\begin{aligned} \gamma_m(1) &= \gamma_{m+1}(0), & (\gamma_4 &:= \gamma_1) \\ \langle \dot{\gamma}_m(1), \dot{\gamma}_{m+1}(0) \rangle &> -|\dot{\gamma}_m(1)| |\dot{\gamma}_{m+1}(0)|. \end{aligned}$$

Wir nennen

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Delta} &= \text{int}(\gamma) && \text{das Innere des Dreiecks,} \\ \Delta &= \overline{\text{int}(\gamma)} && \text{kurz das Dreieck,} \\ \partial\Delta &= \gamma && \text{den orientierten Rand des Dreiecks,} \\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 &&& \text{die orientierten Kanten des Dreiecks,} \\ e_m &= \gamma_m(1) && \text{die Ecken des Dreiecks.} \end{aligned}$$

Die eindeutige Zahl  $\alpha_\Delta(e_m) \in ]-\pi, \pi[$  mit

$$\cos \alpha_\Delta(e_m) = \frac{\langle \dot{\gamma}_m(1), \dot{\gamma}_{m+1}(0) \rangle}{|\dot{\gamma}_m(1)| |\dot{\gamma}_{m+1}(0)|}$$

und

$$\operatorname{sgn}(\alpha_\Delta(e_m)) = \operatorname{sgn}(\det(\dot{\gamma}_m(1), \dot{\gamma}_{m+1}(0)))$$

heisst Aussenwinkel und  $\beta_\Delta(e_m) = \pi - \alpha_\Delta(e_m) \in ]0, 2\pi[$  heisst Innenwinkel von  $\Delta$  an der Ecke  $e_m$ . Schreiben wir

$$\frac{\dot{\gamma}_m(t)}{|\dot{\gamma}_m(t)|} = e^{i\omega_m(t)} \quad \text{mit } \omega_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig,}$$

so heisst

$$\angle \gamma_m := \omega_m(1) - \omega_m(0)$$

die Winkeländerung von  $\Delta$  entlang der Kante  $\gamma_m$ . Es gilt

$$\sum_{m=1}^3 (\angle \gamma_m + \alpha_\Delta(e_m)) = \pm 2\pi. \quad (4.4)$$

Das Vorzeichen sagt aus, ob  $\partial\Delta$  das Dreieck  $\Delta$  positiv oder negativ umläuft.

$M$  sei eine differenzierbare 2-Mannigfaltigkeit. Ein verallgemeinertes Dreieck  $T$  in  $M$  ist ein Paar  $(\varphi, \Delta)$  bestehend aus einer Karte  $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  mit einem verallgemeinerten Dreieck  $\Delta \subseteq \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^2$ . Wir nennen

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{T} &= \varphi^{-1}(\overset{\circ}{\Delta}) && \text{das Innere von } T, \\ T &= \varphi^{-1}(\Delta) && \text{kurz das Dreieck,} \\ \partial T &= \varphi^{-1} \circ \gamma && \text{den orientierten Rand von } T, \\ \Gamma_m &= \varphi^{-1} \circ \gamma_m && \text{die orientierten Kanten von } T, \\ p_m &= \varphi^{-1}(e_m) && \text{die Ecken von } T. \end{aligned}$$

Eine Triangulierung von  $M$  ist eine abzählbare, lokal endliche Menge  $\{T^k\}$  von verallgemeinerten Dreiecken in  $M$  mit

$$M = \bigcup_k T^k$$

Kanten von  $T^k$  seien  $\Gamma_m^k, m = 1, 2, 3$ ,

Ecken von  $T^k$  seien  $p_m^k, m = 1, 2, 3$ ,

und für  $k \neq l$  mit  $T^k \cap T^l \neq \emptyset$  gilt

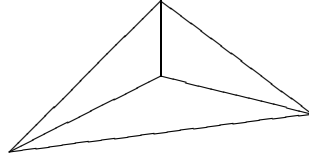
$$T^k \cap T^l = \begin{cases} \{ \text{gemeinsame Ecke von } T^k \text{ und } T^l \} = \{p_m^k\} = \{p_{m'}^l\}, \\ \text{Bild einer gemeinsamen unorientierten Kante von } T^k \text{ und } T^l = \\ \quad = \Gamma_m^k([0, 1]) = \Gamma_{m'}^l([0, 1]). \end{cases}$$

Insbesondere gilt  $\overset{\circ}{T}^k \cap \overset{\circ}{T}^l = \emptyset$  für  $k \neq l$ .

□

**Bemerkung:**

Zu jeder Triangulierung  $\{T^k\}$  erhält man durch baryzentrische Verfeinerung eines der  $T^k$



eine neue Triangulierung  $\{\tilde{T}^k\}$ . Ist die Triangulierung endlich, so bleibt die alternierende Summe der Anzahl Ecken, unorientierten Kanten und Dreiecke dabei unverändert, d.h.

$$\#\{T^k\} - \#\{\Gamma_m^k([0, 1])\} + \#\{p_m^k\} = \#\{\tilde{T}^k\} - \#\{\tilde{\Gamma}_m^k([0, 1])\} + \#\{\tilde{p}_m^k\}$$

□

Wir werden folgenden Satz ohne Beweis verwenden.

**Satz (Triangulierbarkeit kompakter Flächen, Rado 1926)** *Jede kompakte Fläche besitzt eine (endliche) Triangulierung  $\{T^k\}$ . Die Zahl*

$$\chi(M) = \#\{T^k\} - \#\{\Gamma_m^k([0, 1])\} + \#\{p_m^k\}$$

*ist unabhängig von der Triangulierung und heisst Euler-Charakteristik von  $M$ . Für eine orientierbare Fläche ist die Zahl  $g(M)$  definiert durch*

$$2(1 - g(M)) := \chi(M)$$

*und heisst Geschlecht von  $M$ . Es gilt  $g(M) \in \mathbb{N}_0$ .*

□

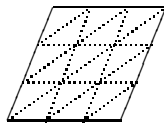
**Bemerkungen:**

1. Cairns bewies 1936, dass jede differenzierbare Mannigfaltigkeit triangulierbar ist.
2. Mit elementaren Argumenten erhalten wir in Proposition A.1 zumindest  $2g(M) \in \mathbb{N}_0$ .

□

**Beispiel:**

Die Riemannsche Zahlenkugel  $S^2$  ist von Geschlecht 0. Die Tori  $\mathbb{C}/\Gamma$  sind von Geschlecht 1, dazu betrachten wir z.B. folgende Triangulierung eines Fundamentalparallelogrammes (es hat hier 18 Dreiecke, 27 Kanten und 9 Ecken - wobei zu beachten ist, dass durch die Quotientenbildung einige Ecken und Kanten zusammenfallen):



□

**Satz 4.1 (Satz von Gauß-Bonnet)** *M sei eine kompakte Riemannsche Fläche und g eine hermitesche Metrik auf M. Dann gilt*

$$\int_M K_g d\mu_g = 2\pi\chi(M) = 4\pi(1 - g(M)).$$

□

Zum Beweis verwenden wir folgende Proposition.

**Proposition 4.4**  *$h : U \subseteq \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} V \subseteq \mathbb{C}$  sei ein holomorpher Diffeomorphismus und*

$$g = \lambda^2 g_{can} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{g} = \eta^2 g_{can}$$

*zwei zur kanonischen Metrik konform äquivalente Metriken auf U bzw. V,  $\lambda : U \rightarrow ]0, \infty[$  bzw.  $\eta : V \rightarrow ]0, \infty[$ , und*

$$g = h^* \tilde{g} \quad \text{auf } U$$

*$\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  bzw.  $\tilde{\gamma} := h \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow V$  seien stetig differenzierbare, regulär parametrisierte Jordanwege, und  $\nu, \tilde{\nu} : [0, 1] \rightarrow S^1 = \partial B_1(0)$  seien die positiv orientierten Einheitsnormalen an  $\gamma$  bzw.  $\tilde{\gamma}$ , d.h.*

$$\begin{aligned} \nu \perp \dot{\gamma} & \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\nu} \perp \dot{\tilde{\gamma}}, \\ |\nu| = 1 & \quad \text{bzw.} \quad |\tilde{\nu}| = 1, \\ \det(\dot{\gamma}, \nu) > 0 & \quad \text{bzw.} \quad \det(\dot{\tilde{\gamma}}, \tilde{\nu}) > 0. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\int_{\tilde{\gamma}} \partial_{\tilde{\nu}} \log \eta ds - \int_{\gamma} \partial_{\nu} \log \lambda ds = (\angle \tilde{\gamma} - \angle \gamma). \quad (4.5)$$

**Beweis:**

Wir schreiben

$$\frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|} = e^{i\omega} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\dot{\tilde{\gamma}}}{|\dot{\tilde{\gamma}}|} = e^{i\tilde{\omega}}$$

mit stetigen  $\omega, \tilde{\omega} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Gemäss Definition 4.2 gilt

$$\angle \gamma = \omega(1) - \omega(0) \quad \text{bzw.} \quad \angle \tilde{\gamma} = \tilde{\omega}(1) - \tilde{\omega}(0). \quad (4.6)$$

Weiter sehen wir

$$\nu = \frac{i \dot{\gamma}}{|i \dot{\gamma}|} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\nu} = \frac{i \dot{\tilde{\gamma}}}{|i \dot{\tilde{\gamma}}|},$$

also

$$\nu = e^{i(\omega+\pi/2)} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\nu} = e^{i(\tilde{\omega}+\pi/2)}.$$

Andererseits gilt

$$\tilde{\nu} = \frac{dh.\nu}{|dh.\nu|} = \frac{h'.\nu}{|h'.\nu|},$$

da  $i \circ dh = dh \circ i$  und  $\det dh > 0$ , da  $h$  holomorph ist. Da  $h' \neq 0$ , können wir  $h'$  in einer einfach zusammenhängenden Umgebung  $\gamma([0, 1]) \subseteq \tilde{U} \subseteq U$  zu

$$h' = e^f \quad \text{in } \tilde{U} \quad (4.7)$$

mit einer holomorphen Funktion  $f = u + i v$  liften. So erhalten wir

$$\tilde{\nu} = e^{i(v \circ \gamma)} \nu$$

und schliesslich

$$v \circ \gamma \equiv \tilde{\omega} - \omega \quad \text{mod } 2\pi\mathbb{Z},$$

also ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$v \circ \gamma = \tilde{\omega} - \omega \quad \text{auf } [0, 1]. \quad (4.8)$$

Mit Proposition 3.3 erhalten wir

$$\lambda^2 g_{can} = g = h^* \tilde{g} = h^*(\eta^2 g_{can}) = (\eta^2 \circ h) h^* g_{can} = (\eta^2 \circ h) |h'|^2 \cdot g_{can},$$

also

$$\log(\eta \circ h) = \log \lambda - u. \quad (4.9)$$

Nun rechnen wir

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} \partial_{\tilde{\nu}} \log \eta \, ds &= \int_0^1 ((\nabla \log \eta) \circ \tilde{\gamma}) \cdot \tilde{\nu} |\dot{\tilde{\gamma}}| \, ds = \int_0^1 ((\nabla \log \eta) \circ h \circ \gamma) \cdot i \dot{\gamma} \, ds \\ &= \int_0^1 ((\nabla \log \eta) \circ h \circ \gamma) \cdot i \, dh \cdot \dot{\gamma} \, ds = \int_0^1 ((\nabla \log \eta) \circ h \circ \gamma) \cdot dh \cdot i \dot{\gamma} \, ds \\ &= \int_0^1 ((\nabla \log(\eta \circ h)) \circ \gamma) \cdot i \dot{\gamma} \, ds = \int_0^1 ((\nabla \log \lambda) \circ \gamma) \cdot \nu |\dot{\gamma}| \, ds - \int_0^1 ((\nabla u) \circ \gamma) \cdot i \dot{\gamma} \, ds \\ &= \int_{\gamma} \partial_{\nu} \log \lambda \, ds + \int_0^1 ((\nabla v) \circ \gamma) \cdot \dot{\gamma} \, ds, \end{aligned}$$

da

$$((\nabla u) \circ \gamma) \cdot i \dot{\gamma} = i^T ((\nabla u) \circ \gamma) \cdot \dot{\gamma}$$

und

$$i^T \nabla u = -\nabla v,$$

da  $i^T = -i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $f = u + i v$  holomorph ist. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} \partial_{\tilde{\nu}} \log \eta \, ds - \int_{\gamma} \partial_{\nu} \log \lambda \, ds &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (v \circ \gamma) \, dt = (v(\gamma(1)) - v(\gamma(0))) \\ &= (\tilde{\omega}(1) - \tilde{\omega}(0)) - (\omega(1) - \omega(0)) = (\tilde{\omega} - \omega)(1) - (\tilde{\omega} - \omega)(0) \end{aligned}$$

mit (4.8) und (4.6).

///

**Beweis von Satz 4.1:**

Nach dem Triangulierbarkeitssatz wählen wir eine Triangulierung  $\{T^k\}$  von  $M$ . Durch baryzentrisches Verfeinern können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass Karten  $z_k : U_k \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}$  der Riemannschen Fläche und verallgemeinerte Dreiecke  $\Delta^k$  in  $z_k(U_k)$  mit  $T^k = z_k^{-1}(\Delta^k)$  existieren. Weiter seien die  $\Delta^k$  positiv durchlaufen. Da  $g$  hermitesch ist, gilt

$$(z_k^{-1})^* g = \lambda_k^2 g_{can} \quad \text{auf } z_k(U_k)$$

mit  $\lambda_k : z_k(U_k) \rightarrow ]0, \infty[$ .

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_M K_g d\mu_g &= \sum_k \int_{T^k} K_g d\mu_g = \sum_k \int_{\Delta^k} -\frac{1}{\lambda_k^2} (\Delta \log \lambda_k) \lambda_k^2 d\mathcal{L}^2 \\ &= \sum_k \left( - \int_{\Delta^k} \Delta \log \lambda_k \right) \\ &= \sum_k \int_{\partial \Delta^k} \partial_{\nu_k} \log \lambda_k ds = \sum_k \sum_{m=1}^3 \int_{\gamma_m^k} \partial_{\nu_k} \log \lambda_k ds. \end{aligned} \quad (4.10)$$

mit dem Divergenzsatz in der Ebene, wobei  $\nu_k$  die nach innen gerichtete Einheitsnormale an  $\Delta^k$  ist. Da  $\partial \Delta^k = \gamma_1^k \oplus \gamma_2^k \oplus \gamma_3^k$  positiv durchlaufen wird, ist  $\nu_k$  die positiv orientierte Einheitsnormale an  $\gamma_m^k$ .

Jede unorientierte Kante tritt zweimal in der Summe in (4.10) auf, einmal in jeder Laufrichtung. Aus Proposition 4.4 (4.5) folgt

$$\sum_k \sum_{m=1}^3 \left( \int_{\gamma_m^k} \partial_{\nu_k} \log \lambda_k ds - \angle \gamma_m^k \right) = 0.$$

Dann ergeben (4.4) und (4.10)

$$\begin{aligned} \int_M K_g d\mu_g &= \sum_k \sum_{m=1}^3 \angle \gamma_m^k = \sum_k (2\pi - \sum_{m=1}^3 \alpha_{\Delta^k}(e_m^k)) \\ &= 2\pi \#\{T^k\} - \sum_k \sum_{m=1}^3 (\pi - \beta_{\Delta^k}(e_m^k)) \\ &= 2\pi(\#\{T^k\} - \#\{\Gamma_m^k([0, 1])\}) + \sum_k \sum_{m=1}^3 \beta_{\Delta^k}(e_m^k), \end{aligned} \quad (4.11)$$

da in der Summe  $\sum_k \sum_{m=1}^3$  alle unorientierten Kanten  $\Gamma_m^k([0, 1])$  doppelt auftreten.

Da  $(z_k^{-1})^* g = \lambda_k^2 g_{can}$  konform äquivalent zur kanonischen Metrik ist, gilt

$$\cos \beta_{\Delta^k}(e_m^k) = \frac{\langle \dot{\gamma}_{m+1}^k(1), -\dot{\gamma}_m^k(0) \rangle}{|\dot{\gamma}_{m+1}^k(1)| |\dot{\gamma}_m^k(0)|} = \frac{g(\dot{\Gamma}_{m+1}^k(1), -\dot{\Gamma}_m^k(0))}{|\dot{\Gamma}_{m+1}^k(1)|_g |\dot{\Gamma}_m^k(0)|_g} =: \cos \angle_g(\dot{\Gamma}_{m+1}^k(1), -\dot{\Gamma}_m^k(0)),$$

wobei  $\dot{\Gamma}_m^k = dz_k^{-1} \cdot \dot{\gamma}_m^k \in TM, |X|_g = \sqrt{g(X, X)}$  und  $\cos \angle_g(X, Y) = \frac{g(X, Y)}{|X|_g |Y|_g}, \angle_g(X, Y) \in [0, 2\pi[$  für  $X, Y \in T_p M - \{0\}$ .

In der Summe in (4.11) treten alle Innenwinkel an allen  $p_m^k \in M$  auf, da  $M = \bigcup_k T^k$ . Addiert man alle Innenwinkel an einem Punkt  $p_m^k$ , so erhält man  $2\pi$ . Dies ergibt

$$\sum_k \sum_{m=1}^3 \beta_{\Delta_k}(e_m^k) = 2\pi \# \{p_m^k\}$$

und

$$\int_M K_g d\mu_g = 2\pi \chi(M)$$

///

### Bemerkungen:

1. Mit dem Satz von Gauß-Bonnet ist die Euler-Charakteristik für kompakte Riemannsche Flächen unabhängig von der Triangulierung. Mit Satz 3.1 und Proposition 3.1 trägt jede glatte orientierbare Fläche die Struktur einer Riemannschen Fläche, und daher ist die Euler-Charakteristik eine diffeomorphe Invariante für glatte orientierbare, kompakte Fläche. Tatsächlich ist die Euler-Charakteristik eine topologische Invariante.
2. Mit Satz 3.1 existiert zu jeder glatten Metrik  $g$  auf einer glatten orientierbaren Fläche  $M$  eine komplexe Struktur auf  $M$ , bezüglich der  $g$  hermitesch ist. Damit kann man zuerst jeder Metrik  $g$  ein Flächenmass  $\mu_g$  und eine Gauß-Krümmung  $K_g$  zuordnen, und aus dem Satz von Gauß-Bonnet folgt dann für kompakte glatte, orientierbare Flächen

$$\int K_g d\mu_g = 2\pi \chi(M).$$

Mit Lemma 3.8 und Approximation folgt dies auf jeder kompakten, orientierbaren  $C^3$ -Fläche mit  $C^2$ -Metrik  $g$ .

□

**Definition 4.3**  $f : M \rightarrow N$  sei eine nicht-konstante holomorphe Abbildung zwischen zwei Riemannschen Flächen. Zu jedem Punkt  $p \in M, q := f(p) \in N$  und jeder Karte  $w : V \subseteq N \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $q \in V, w(q) = 0$  gibt es eine Karte  $z : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $p \in U$  und

$$w \circ f \circ z^{-1} = id^m$$

für eine von der Wahl der Karten unabhängiges  $m \in \mathbb{N}$ . Der Punkt  $p$  heisst Verzweigungspunkt, falls  $m > 1$ , und

$$v_f(p) := m - 1$$

heisst Verzweigungszahl von  $f$  in  $p$ .

Der Grad von  $f$  in  $q \in N$  ist definiert als die Anzahl der Urbilder, gezählt entsprechend der Vielfachheiten, d.h.

$$\deg_q f := \sum_{p \in f^{-1}(q)} (v_f(p) + 1) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}.$$

Ist  $M$  kompakt, so gibt es nur endlich viele Verzweigungspunkte und

$$v_f := \sum_{p \in M} v_f(p)$$

heisst die Verzweigungsordnung von  $f$ . Ist  $v_f = 0$ , so heisst  $f$  unverzweigt, andernfalls heisst  $f$  verzweigt.

□

Die nächste Proposition zeigt, dass der Grad für kompaktes  $M$  unabhängig von  $q \in N$  ist.

**Proposition 4.5**  *$M$  und  $N$  seien Riemannsche Flächen,  $M$  kompakt und  $f : M \rightarrow N$  holomorph und nicht-konstant. Dann ist der Grad von  $f$  definiert durch*

$$\deg f := \deg_q f \in \mathbb{N}$$

unabhängig von  $q \in N$ .

**Beweis:**

Mit der Wahl der Karten in obiger Definition sehen wir, dass  $\deg_q f$  lokal konstant für  $q \in N$  ist. Damit sind die Mengen

$$A_m := \{q \in N \mid \deg_q f = m\}$$

offen für  $m \in \mathbb{N}$ . Da  $A_0 := N - f(M)$  und  $f(M) \subseteq N$  kompakt ist, gilt dies auch für  $m = 0$ . Da

$$N = \sum_{m=0}^{\infty} A_m, \quad (\text{disjunkte Vereinigung}),$$

sind  $A_m$  auch abgeschlossen. Nun gilt  $A_m \neq \emptyset$  für ein  $m \geq 1$ , also  $A_m = N$ , da  $N$  zusammenhängend ist.

///

**Bemerkung:**

Es folgt, dass  $f$  surjektiv und somit  $N$  auch kompakt ist.

□

**Satz 4.2 (Satz von Riemann-Hurwitz)**  *$M$  und  $N$  seien kompakte Riemannsche Flächen und  $f : M \rightarrow N$  sei holomorph und nicht-konstant. Dann gilt*

$$\chi(M) = \deg f \cdot \chi(N) - v_f.$$

**Beweis:**

$g$  sei eine hermitesche Metrik auf  $N$ .  $p_1, \dots, p_k$  seien die Verzweigungspunkte von  $f$  und  $q_l := f(p_l)$  die nicht notwendig verschiedenen Bilder der Verzweigungspunkte. Wir setzen

$$M_0 := M - \{p_1, \dots, p_k\} \quad \text{und} \quad N_0 := N - \{q_1, \dots, q_k\}.$$

Als offene Teilmengen sind dies Riemannsche Flächen und

$$f : M_0 \longrightarrow N_0$$

ist eine holomorphe Immersion, da  $df_p \neq 0$  für  $p \in M_0$ . Die Metrik

$$g_0 := f^*(g|_{N_0}) \quad \text{ist hermitesch auf } M_0$$

mit Proposition 3.6, und es gilt

$$K_{g_0} = K_g \circ f \quad \text{auf } M_0. \quad (4.12)$$

Weiter gilt

$$\#f^{-1}(q) = \deg f \quad \text{für } q \in M_0.$$

Genauer existiert zu  $q \in N$  eine offene, zusammenhängende Menge  $V(q)$  mit

$$f^{-1}(V(q)) = \bigcup_{p \in f^{-1}(q)} U(p)$$

und

$$f|_{U(p)} : (U(p), g_0) \longrightarrow (V(q), g)$$

ist eine Isometrie für alle  $p \in f^{-1}(q)$ . Dies ergibt

$$f(\mu_{g_0}|_{U(p)}) = \mu_g|_{V(q)},$$

also

$$f(\mu_{g_0}) = \deg f \cdot \mu_g \quad \text{auf } N_0. \quad (4.13)$$

Aus (4.12) und (4.13) folgt für  $\{q_1, \dots, q_k\} \subseteq V \subseteq N$ , dass

$$\begin{aligned} \int_{M-f^{-1}(V)} K_{g_0} d\mu_{g_0} &= \int_{M-f^{-1}(V)} (K_g \circ f) d\mu_{g_0} = \\ &= \int_{N-V} K_g d(f(\mu_{g_0})) = \deg f \int_{N-V} K_g d\mu_g. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Nun wählen wir eine hermitesche Metrik  $\tilde{g}$  auf  $M$ . Damit ist  $\tilde{g}|_{M_0}$  auch hermitesch auf  $M_0$ . Nach Proposition 3.5 existiert  $\xi : M_0 \rightarrow ]0, \infty[$  mit

$$g_0 = \xi^2 \cdot \tilde{g} \quad \text{auf } M_0.$$

Nach Proposition 4.2 folgt

$$\mu_{g_0} = \xi^2 \mu_{\tilde{g}}$$

und

$$K_{g_0} = \frac{1}{\xi^2} K_{\tilde{g}} - \frac{1}{\xi^2} \Delta_{\tilde{g}} \log \xi.$$

(4.14) ergibt für  $\{q_1, \dots, q_k\} \subseteq V \subseteq N$ , dass

$$\deg f \int_{N-V} K_g d\mu_g = \int_{M-f^{-1}(V)} K_{\tilde{g}} d\mu_{\tilde{g}} - \int_{M-f^{-1}(V)} (\Delta_{\tilde{g}} \log \xi) d\mu_{\tilde{g}}. \quad (4.15)$$

Wir wählen beliebige Karten  $w_l : V_l \subseteq N \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $q_l \in V_l$ ,  $V_l$  paarweise disjunkt und  $w_l = w_{l'}$  für  $q_l = q_{l'}$ . Dazu gibt es Karten

$$z_l : U_l \subseteq M \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit  $p_l \in U_l \subseteq f^{-1}(V_l)$ ,  $U_l$  paarweise disjunkt und

$$w_l \circ f \circ z_l^{-1} = \text{id}^{v_f(p_l)+1}$$

Durch Verkleinern von  $U_l$  und  $V_l$  und Strecken erreichen wir

$$z_l(U_l) = B_1(0) = w_l(V_l) \quad \text{für } l = 1, \dots, k,$$

also für  $m_l := v_f(p_l) + 1$ , dass

$$h_l := w_l \circ f \circ z_l^{-1} = \text{id}_{B_1(0)}^{m_l} : B_1(0) \longrightarrow B_1(0) \subseteq \mathbb{C}.$$

Wir schreiben für  $0 < \varrho \leq 1$

$$B_\varrho(p_l) := z_l^{-1}(B_\varrho(0)) \subseteq M$$

und

$$B_\varrho(q_l) := w_l^{-1}(B_\varrho(0)) \subseteq N.$$

In obigen Karten erhalten wir

$$(w_l^{-1})^* g = \eta_l^2 g_{can} \quad \text{in } B_1(0)$$

und

$$(z_l^{-1})^* \tilde{g} = \lambda_l^2 g_{can} \quad \text{in } B_1(0)$$

mit  $\eta_l, \lambda_l : B_1(0) \rightarrow ]0, \infty[$ . Mit Proposition 3.3 gilt

$$\begin{aligned} (\eta_l^2 \circ h_l) |h'_l|^2 g_{can} &= h_l^* (\eta_l^2 g_{can}) = h_l^* (w_l^{-1})^* g = (z_l^{-1})^* f^* g = \\ &= (z_l^{-1})^* g_0 = (\xi^2 \circ z_l) (z_l^{-1})^* \tilde{g} = (\xi^2 \circ z_l) \lambda_l^2 g_{can} \quad \text{auf } B_1(0) - \{0\}, \end{aligned}$$

also

$$(\xi^2 \circ z_l) = \frac{\eta_l^2 \circ h_l}{\lambda_l^2} |h'_l|^2 \quad \text{auf } B_1(0) - \{0\}. \quad (4.16)$$

Mit dem Satz von Gauß-Bonnet, Satz 4.1, und (4.15) erhalten wir

$$\begin{aligned} \deg f \cdot 2\pi\chi(N) &= \deg f \int_N K_g d\mu_g = \lim_{\varrho \downarrow 0} \deg f \int_{N - \bigcup_{l=1}^k B_\varrho(q_l)} K_g d\mu_g \\ &= \lim_{\varrho \downarrow 0} \int_{M - \bigcup_{l=1}^k B_{\varrho^{1/m_l}}(p_l)} K_{\tilde{g}} d\mu_{\tilde{g}} - \lim_{\varrho \downarrow 0} \int_{M - \bigcup_{l=1}^k B_{\varrho^{1/m_l}}(p_l)} \Delta_{\tilde{g}} \log \xi d\mu_{\tilde{g}} \\ &= 2\pi\chi(M) + \sum_{l=1}^k \lim_{\varrho \downarrow 0} \int_{\partial B_\varrho(0)} \partial_r \log (\xi \circ z_l) ds \end{aligned} \quad (4.17)$$

mit dem Divergenzsatz in der Ebene. Da  $(\eta_l^2 \circ h_l) \lambda_l^{-2} \in C_{loc}^\infty(B_1(0))$  und  $\neq 0$  in  $B_1(0)$ , folgt mit (4.16), dass

$$\begin{aligned} & \lim_{\varrho \downarrow 0} \int_{\partial B_\varrho(0)} \partial_r \log(\xi \circ z_l) = \lim_{\varrho \downarrow 0} \int_{\partial B_\varrho(0)} \partial_r \log |h'_l| ds \\ &= \lim_{\varrho \downarrow 0} \int_{\partial B_\varrho(0)} \partial_r \log(m_l r^{m_l-1}) ds = \lim_{\varrho \downarrow 0} \int_{\partial B_\varrho(0)} \frac{(m_l - 2)}{r} ds = 2\pi(m_l - 2) = 2\pi(v_f(p_l) - 1). \end{aligned}$$

Aus (4.17) folgt damit

$$\deg f \cdot \chi(N) = \chi(M) + v_f.$$

///

### Bemerkungen:

1. Verwendet man anstelle der Euler-Charakteristiken die Geschlechter, so wird die Formel im Satz von Riemann-Hurwitz zu

$$2(1 - g(M)) = \deg f \cdot 2(1 - g(N)) - v_f.$$

2.  $v_f$  ist immer gerade, da die Geschlechter  $g(M), g(N) \in \mathbb{N}_0$ .
3.  $g(M) \geq g(N)$ .
4.  $\deg f = 1 \implies f$  unverzweigt,  $g(M) = g(N)$ .
5. Ist  $f$  unverzweigt, so gilt

$$\begin{aligned} g(N) = 0 &\implies g(M) = 0, \deg f = 1 \\ g(N) = 1 &\implies g(M) = 1 \\ g(N) \geq 2 &\implies \begin{cases} g(M) = g(N), \deg f = 1 & \text{oder} \\ g(M) > g(N), \deg f > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

6.  $g(M) = g(N) = 1 \implies f$  ist unverzweigt.
7.  $g(M) = g(N) \geq 2 \implies f$  ist unverzweigt,  $\deg f = 1$ .
8. Auf jedem Torus  $T = \mathbb{C}/\Gamma$  mit  $\Gamma := \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$  für über  $\mathbb{R}$  linear unabhängige  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$  ist die Weierstrass  $\wp$ -Funktion, definiert durch

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Gamma - \{0\}} \left( \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \quad \text{für } z \in \mathbb{C} - \Gamma,$$

eine meromorphe, doppelt-periodische Funktion und induziert eine nicht-konstante holomorphe Abbildung  $\mathbb{C}/\Gamma \rightarrow S^2$  vom niedrigst möglichen Grad 2.

□

## Teil II

# Hyperbolische Riemannsche Flächen

## 5 Die Kobayashi Metrik

Wir beginnen mit einer Verallgemeinerung des Schwarz lemma aus der Funktionentheorie.

**Lemma 5.1 (Ahlfors-Schwarz lemma)** *Es sei  $M$  eine Riemannsche Fläche mit einer hermiteschen Metrik  $g$  mit Gauß-Krümmung*

$$K_g \leq -\kappa^2 < 0$$

*für ein  $\kappa > 0$ . Dann gilt für jede holomorphe Abbildung  $f : D \rightarrow M$ , dass*

$$f^*g \leq \kappa^{-2}g_{\text{poin}},$$

*wobei  $g_{\text{poin}}$  die Poincaré-Metrik auf  $D$  aus (4.2) ist.*

### Beweis:

Ersetzen wir  $g$  durch  $\kappa^2 g$ , so genügt es  $\kappa = 1$  zu betrachten. In Punkten  $z \in D$  mit  $f'(z) \neq 0$  hat  $f'(z)$  vollen Rang, und  $f|U(z) \xrightarrow{\sim} V(f(z))$  ist ein lokaler holomorpher Diffeomorphismus bzw.  $\varphi := (f|U(z))^{-1} : V(f(z)) \xrightarrow{\sim} U(z) \subseteq \mathbb{C}$  ist eine Karte von  $M$ . Da  $g$  hermitesch ist, ist  $f^*g = (\varphi^{-1})^*g$  mit Proposition 3.6 konform zu  $g_{\text{can}}$ . Dies ergibt

$$f^*g = \lambda^2 g_{\text{can}} \quad \text{auf } D$$

mit  $\lambda \in C_{\text{loc}}^\infty(D, [0, \infty])$  und  $[\lambda > 0] = [f' \neq 0] =: U$ .  $f^*g$  ist eine Metrik auf  $U$ , und mit Proposition 4.1 erhalten wir

$$-\frac{1}{\lambda^2} \Delta_z \log \lambda = -\Delta_{f^*g} \log \lambda = K_{f^*g} = K_g \circ f \leq -1 \quad \text{in } U.$$

Für  $u := \log \lambda$  auf  $U$  schreibt sich dies

$$\Delta_z u \geq e^{2u} \quad \text{in } U. \tag{5.1}$$

Andererseits wissen wir aus (4.2) für die Poincaré-Metrik

$$-\frac{(1-|z|^2)^2}{4} \Delta_z \log \frac{2}{1-|z|^2} = K_{g_{\text{poin}}} = -1$$

und erhalten für

$$v_\varrho(z) := \log \frac{2\varrho}{\varrho^2 - |z|^2} \quad \text{für } |z| < \varrho < 1,$$

dass

$$\Delta_z v_\varrho(z) = \Delta_z \log \frac{2}{1-|z/\varrho|^2} = \frac{4}{\varrho^2(1-|z/\varrho|^2)^2} = \left( \frac{2\varrho}{\varrho^2 - |z|^2} \right)^2 = e^{2v_\varrho}.$$

Zusammen mit (5.1) ergibt dies

$$\Delta_z(u - v_\varrho) \geq e^{2u} - e^{2v_\varrho} \quad \text{in } U \cap B_\varrho(0)$$

und für die offene Menge  $\Omega_\varrho := [u > v_\varrho] \subseteq U \cap B_\varrho(0)$ , dass

$$\Delta_z(u - v_\varrho) > 0 \quad \text{in } \Omega_\varrho \subseteq U \cap B_\varrho(0). \quad (5.2)$$

Ist nun  $\Omega_\varrho \neq \emptyset$ , so wählen wir  $z_k \in \Omega_\varrho$  mit

$$(u - v_\varrho)(z_k) \rightarrow \sup_{\Omega_\varrho} (u - v_\varrho) > 0$$

und erhalten für eine Teilfolge  $z_k \rightarrow z \in \overline{B_\varrho(0)}$ . Nun ist

$$(u - v_\varrho) = \log \frac{\lambda(\varrho^2 - |\cdot|^2)}{2\varrho} \quad \text{in } U \cap B_\varrho(0) \ni z_k,$$

und wir erhalten

$$1 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda(z_k)(\varrho^2 - |z_k|^2)}{2\varrho} = \frac{\lambda(z)(\varrho^2 - |z|^2)}{2\varrho},$$

also  $\lambda(z) > 0, |z| < \varrho$ , d.h.  $z \in U \cap B_\varrho(0)$ . Dies ergibt  $(u - v_\varrho)(z) = \sup_{\Omega_\varrho} (u - v_\varrho) > 0$ , also  $z \in \Omega_\varrho$ . Weiter ist  $z$  ein lokales Maximum von  $u - v_\varrho$  in  $\Omega_\varrho$ , und wir sehen

$$\Delta_z(u - v_\varrho)(z) = (\partial_x^2 + \partial_y^2)(u - v_\varrho)(z) \leq 0$$

im Widerspruch zu (5.2).

Dies ergibt  $u \leq v_\varrho$  in  $U \cap B_\varrho(0)$  bzw.

$$\lambda(z) \leq \frac{2\varrho}{\varrho^2 - |z|^2} \rightarrow \frac{2}{1 - |z|^2} \quad \text{für alle } |z| < 1,$$

also

$$f^*g = \lambda^2 g_{can} \leq \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} g_{can} = g_{poin},$$

und das Lemma ist bewiesen.

///

**Definition 5.1** Auf einer Riemannschen Fläche  $M$  definieren wir die Kobayashi Pseudometrik für  $p, q \in M$  mit der durch die Poincaré-Metrik definierte Abstandsfunktion  $d_{g_{poin}}^D = d_{g_{poin}}^D$  auf  $D$  gemäss (3.1) durch

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{H}}^M(p, q) := \\ &:= \inf \left\{ \sum_{i=1}^n d_{g_{poin}}^D(z_i, w_i) \mid \exists p_0, p_1, \dots, p_n \in M, p_0 = p, p_n = q, \right. \\ &\quad \exists f_i : D \rightarrow M \text{ holomorph :} \\ &\quad \exists z_i, w_i \in D : f_i(z_i) = p_{i-1}, f_i(w_i) = p_i, \\ &\quad \left. i = 1, \dots, n \right\}. \end{aligned}$$

Die Riemannsche Fläche  $M$  heisst hyperbolisch oder Kobayashi-hyperbolisch, wenn  $d_{\mathcal{H}}^M$  eine Metrik ist, d.h. wenn

$$d_{\mathcal{H}}^M(p, q) > 0 \quad \text{für } p \neq q \in M,$$

und in diesem Fall heisst  $d_{\mathcal{H}}^M$  die Kobayashi Metrik auf  $M$ .

□

### Bemerkungen:

1. Klarerweise ist  $d_{\mathcal{H}}^M$  immer nicht-negativ, symmetrisch und erfüllt immer die Dreiecksungleichung, also ist  $d_{\mathcal{H}}^M$  immer eine Pseudometrik.
2. Tatsächlich verschwindet auf nicht hyperbolischen Riemannschen Flächen  $M$  die Kobayashi Pseudometrik vollständig, d.h.  $d_{\mathcal{H}}^M = 0$ . Die kann mit dem Uniformisierungssatz für Riemannsche Flächen gezeigt werden.
3. Für  $p \in M$  wählen wir eine offene Umgebung  $U(p)$  von  $p$  mit einer Karte  $\varphi : U(p) \xrightarrow{\approx} D$  und sehen für  $p_k \rightarrow p$  in  $M$ , dass  $\varphi(p_k) \rightarrow \varphi(p)$ , also

$$d_{\mathcal{H}}^M(p_k, p) \leq d_{g_{\text{poin}}}^D(\varphi(p_k), \varphi(p)) \rightarrow 0.$$

Weiter sehen wir für  $q \in M$  mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|d_{\mathcal{H}}^M(p_k, q) - d_{\mathcal{H}}^M(p, q)| \leq d_{\mathcal{H}}^M(p_k, p) \rightarrow 0, \quad (5.3)$$

und  $p \mapsto d_{\mathcal{H}}^M(p, q)$  ist stetig. Daraus folgt, alle Bälle

$$B_{\varrho}^{d_{\mathcal{H}}^M}(p) := \{q \in M \mid d_{\mathcal{H}}^M(p, q) < \varrho\}$$

bezüglich der Kobayashi Pseudometrik  $d_{\mathcal{H}}^M$  sind offen in  $M$ .

4. Auf dem Einheitsball erhalten wir mit der Identität als Abbildung

$$d_{\mathcal{H}}^D(p, q) \leq d_{g_{\text{poin}}}^D(p, q) \quad \text{für } p, q \in D. \quad (5.4)$$

Die umgekehrte Ungleichung erhalten wir unten mit dem Ahlfors-Schwarz Lemma 5.1.

5.  $\mathbb{C}$  ist nicht hyperbolisch, denn für  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  wählen wir die holomorphe Abbildung  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f_n(z) := z_1 + n(z_2 - z_1)z$ , also  $f_n(0) = z_1, f_n(1/n) = z_2$ , und sehen

$$d_{\mathcal{H}}^{\mathbb{C}}(z_1, z_2) \leq d_{g_{\text{poin}}}^D(0, 1/n) \rightarrow 0. \quad (5.5)$$

□

Die Kobayashi Pseudometrik ist fallend unter holomorphen Abbildungen.

**Proposition 5.2** *Es sei  $h : M \rightarrow N$  eine holomorphe Abbildung zwischen zwei Riemannschen Flächen. Dann gilt*

$$d_{\mathcal{H}}^N(h(p), h(q)) \leq d_{\mathcal{H}}^M(p, q) \quad \text{für } p, q \in M,$$

*und Gleichheit gilt, wenn  $h$  biholomorph und bijektiv ist.*

**Beweis:**

Für  $p_0, \dots, p_n \in M, p_0 = p, p_n = q, f_i : D \rightarrow M$  holomorph,  $z_i, w_i \in D, f_i(z_i) = p_{i-1}, f_i(w_i) = p_i$  für  $i = 1, \dots, n$  ist  $h(p_i) = (h \circ f_i)(w_i) = (h \circ f_{i+1})(z_{i+1}) \in N, h \circ f_i : D \rightarrow N$  holomorph, also mit der Definition der Kobayashi Pseudometrik auf  $N$

$$d_{\mathcal{H}}^N(h(p), h(q)) \leq \sum_{i=1}^n d_{g_{\text{poín}}}^D(z_i, w_i).$$

Nehmen wir das Infimum über die rechte Seite, so folgt

$$d_{\mathcal{H}}^N(h(p), h(q)) \leq d_{\mathcal{H}}^M(p, q).$$

Ist  $h$  biholomorph und bijektiv, so folgt die umgekehrte Ungleichung durch Anwendung von  $h^{-1}$ .

///

**Bemerkungen:**

1. Für eine holomorphe Abbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow M$  in eine hyperbolische Riemannsche Fläche  $M$  sehen wir, da  $d_{\mathcal{H}}^{\mathbb{C}} = 0$  mit (5.5),

$$d_{\mathcal{H}}^M(f(z), f(w)) \leq d_{\mathcal{H}}^{\mathbb{C}}(z, w) = 0 \quad \text{für } z, w \in \mathbb{C},$$

also ist  $f$  konstant.

2. Da die Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$  mit  $z \mapsto e^z$  nicht konstant ist, ist  $\mathbb{C} - \{0\}$  nicht hyperbolisch. Da diese Abbildung weiter surjektiv ist, existieren zu beliebigen  $w, w' \in \mathbb{C} - \{0\}$  Urbilder  $z, z' \in \mathbb{C}$  mit  $e^z = w, e^{z'} = w'$ , und mit (5.5) folgt

$$d_{\mathcal{H}}^{\mathbb{C}-\{0\}}(w, w') \leq d_{\mathcal{H}}^{\mathbb{C}}(z, z') = 0,$$

also erhalten wir genauer  $d_{\mathcal{H}}^{\mathbb{C}-\{0\}} = 0$ .

3. Da die Quotientenabbildung bzw. die Überlagerungsprojektion  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$  surjektiv ist, folgt wie in der vorigen Bemerkung, dass jeder Torus  $\mathbb{C}/\Gamma$  nicht hyperbolisch mit  $d_{\mathcal{H}}^{\mathbb{C}/\Gamma} = 0$  ist.

□

Mit dem Ahlfors-Schwarz Lemma 5.1 bekommen wir eine untere Abschätzung für die Kobayashi Pseudometrik auf Riemannschen Flächen mit negativ gekrümmten hermiteschen Metriken, und ein Kriterium für Hyperbolizität.

**Proposition 5.3** *Es sei  $M$  eine Riemannsche Fläche mit einer hermiteschen Metrik  $g$  mit*

$$K_g \leq -\kappa^2 < 0$$

*für ein  $\kappa > 0$ . Dann gilt*

$$d_{\mathcal{H}}^M(p, q) \geq \kappa d_g^M(p, q) \quad \text{für } p, q \in M, \quad (5.6)$$

*für die durch die Riemannsche Metrik  $g$  definierte Abstandsfunktion  $d_g^M$  auf  $M$ , insbesondere ist  $M$  hyperbolisch.*

**Beweis:**

Wir rechnen für eine beliebige holomorphe Abbildung  $f : D \rightarrow M, z, w \in D$  und einen glatten Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$  mit  $\gamma(0) = z, \gamma(1) = w$  mit dem Ahlfors-Schwarz Lemma 5.1, dass

$$\begin{aligned} L_{\text{poin}}^D(\gamma) &= \int_0^1 \sqrt{g_{\text{poin}\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} \, dt \geq \int_0^1 \sqrt{\kappa^2(f^*g)_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} \, dt = \\ &= \kappa \int_0^1 \sqrt{g_{f(\gamma(t))}(df_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t), df_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t))} \, dt = \\ &= \kappa \int_0^1 \sqrt{g_{(f \circ \gamma)(t)}((f \circ \gamma)'(t), (f \circ \gamma)'(t))} \, dt = \kappa L_g^M(f \circ \gamma) \geq \kappa d_g^M(f(z), f(w)), \end{aligned}$$

und nach Übergang zum Infimum über alle solche Wege

$$d_{g_{\text{poin}}}^D(z, w) \geq \kappa d_g^M(f(z), f(w)).$$

Dann folgt mit der Definition der Kobayashi Pseudometrik mit der Dreiecksungleichung für  $d_g^M$ , dass

$$d_{\mathcal{H}}^M(p, q) \geq \kappa d_g^M(p, q) \quad \text{für } p, q \in M,$$

also (5.6). Insbesondere folgt  $d_{\mathcal{H}}^M(p, q) > 0$  für  $p \neq q$ , da  $d_g^M$  eine Metrik ist. Damit ist  $d_{\mathcal{H}}^M$  eine Metrik, und  $M$  ist hyperbolisch.

///

**Bemerkung:**

Da auf dem Einheitsball  $K_{g_{\text{poin}}} \equiv -1$  mit (4.2), ergibt dies

$$d_{\mathcal{H}}^D(p, q) \geq d_{g_{\text{poin}}}^D(p, q) \quad \text{für } p, q \in D, \quad (5.7)$$

also  $d_{\mathcal{H}}^D = d_{g_{\text{poin}}}^D$  mit (5.4), und  $D$  ist hyperbolisch.

□

Wir haben oben gesehen, dass die von der Kobayashi Pseudometrik erzeugte Topologie in der Topologie der Riemannschen Fläche enthalten ist. Im Fall einer Kobayashi Metrik, d.h. wenn die Riemannsche Fläche hyperbolisch ist, sind die Topologien tatsächlich gleich.

**Proposition 5.4** *Auf jeder hyperbolischen Riemannschen Fläche erzeugt die Kobayashi Metrik die Topologie der Riemannschen Fläche.*

□

Zum Beweis verwenden wir folgenden beiden Hilfslemmata.

**Lemma 5.5** *Auf jeder Riemannschen Fläche sind alle Bälle bezüglich der Kobayashi Pseudometrik wegzusammenhängend.*

**Beweis:**

$M$  sei eine Riemannsche Fläche und  $B_\varrho^{d_{\mathcal{H}}^M}(p)$  ein Ball der Kobayashi Pseudometrik. Wir zeigen jedes  $q \in B_\varrho^{d_{\mathcal{H}}^M}(p)$  lässt sich mit einem Weg in  $B_\varrho^{d_{\mathcal{H}}^M}(p)$  zum Zentrum  $p$  verbinden. Nach Definition 5.1 existieren Punkte  $p_0, \dots, p_n \in M, p_0 = p, p_n = q, f_i : D \rightarrow M$  holomorph,  $z_i, w_i \in D$  mit  $f_i(z_i) = p_{i-1}, f_i(w_i) = p_i$  und ein  $\delta > 0$  mit

$$\sum_{i=1}^n d_{g_{\text{poin}}}^D(z_i, w_i) < d_{\mathcal{H}}^M(p, q) + \delta < \varrho - \delta.$$

Wir wählen Wege  $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow D$  mit  $\gamma_i(0) = z_i$  und  $\gamma_i(1) = w_i$  und

$$L_{\text{poin}}^D(\gamma_i) < d_{g_{\text{poin}}}^D(z_i, w_i) + \delta$$

und setzen  $\tilde{\gamma} : [0, n] \rightarrow M$  mit

$$\tilde{\gamma}(i-1+t) := f_i(\gamma_i(t)) \quad \text{für } t \in [0, 1], i = 1, \dots, n.$$

Da  $f_i(\gamma_i(1)) = f_i(w_i) = p_i = f_{i+1}(z_{i+1}) = f_{i+1}(\gamma_{i+1}(0))$  für  $i = 1, \dots, n-1$ , ist  $\gamma$  stetig. Weiter sehen wir

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{H}}^M(p, \tilde{\gamma}(i-1+t)) &= d_{\mathcal{H}}^M(p, f_i(\gamma_i(t))) \leq d_{\mathcal{H}}^M(p, f_i(z_i)) + d_{\mathcal{H}}^M(f_i(z_i), f_i(\gamma_i(t))) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{i-1} d_{g_{\text{poin}}}^D(z_j, w_j) + d_{g_{\text{poin}}}^D(z_i, \gamma_i(t)) \leq \sum_{j=1}^{i-1} d_{g_{\text{poin}}}^D(z_j, w_j) + L_{\text{poin}}^D(\gamma) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^i d_{g_{\text{poin}}}^D(z_j, w_j) + \delta < \varrho, \end{aligned}$$

also  $\gamma(i-1+t) \in B_\varrho^{d_{\mathcal{H}}^M}(p)$ , und  $\gamma$  ist ein Weg in  $B_\varrho^{d_{\mathcal{H}}^M}(p)$ .

///

**Lemma 5.6** *Es sei  $M$  eine Riemannsche Fläche,  $p \in M$  und  $U(p) \neq M$  eine offene Umgebung von  $p$  mit kompaktem Abschluss. Dann gilt*

$$\min_{r \in \partial U(p)} d_{\mathcal{H}}^M(p, r) = \inf_{q \in M - U(p)} d_{\mathcal{H}}^M(p, q). \quad (5.8)$$

**Beweis:**

Für  $q \notin U(p)$  und  $\varrho > d_{\mathcal{H}}^M(p, q)$  ist  $q \in B_\varrho^{d_{\mathcal{H}}^M}(p) \not\subseteq U(p)$ . Da  $B_\varrho^{d_{\mathcal{H}}^M}(p)$  mit Lemma 5.5 wegzusammenhängend und  $p \in B_\varrho^{d_{\mathcal{H}}^M}(p) \cap U(p) \neq \emptyset$ , existiert

$$r \in B_\varrho^{d_{\mathcal{H}}^M}(p) \cap \partial U(p) \neq \emptyset,$$

also  $d_{\mathcal{H}}^M(p, r) < \varrho$  und

$$\inf_{r \in \partial U(p)} d_{\mathcal{H}}^M(p, r) \leq \inf_{q \in M - U(p)} d_{\mathcal{H}}^M(p, q).$$

Da  $d_{\mathcal{H}}^M(p, \cdot)$  stetig ist, wird das Minimum auf der kompakten Menge  $\partial U(p)$  angenommen, und klarerweise gilt  $\geq$ , da  $\partial U(p) \subseteq M - U(p)$ . Zusammen ist das Lemma bewiesen.

///

**Beweis von Proposition 5.4:**

Wir wissen bereits, dass auf jeder Riemannschen Fläche die von der Kobayashi Pseudometrik erzeugte Topologie in der Topologie von  $M$  enthalten ist. Nun sei  $U \subseteq M$  offen und  $p \in U$ . Da  $M$  lokalkompakt ist, gibt es eine offene Umgebung  $U(p) \neq M$  von  $p$  mit  $U(p) \subseteq U$  und kompaktem Abschluss. Da  $M$  hyperbolisch ist, haben wir

$$\varrho := \min_{r \in \partial U(p)} d_{\mathcal{H}}^M(p, r) > 0.$$

Mit Lemma 5.6 erhalten wir  $d_{\mathcal{H}}^M(p, \cdot) \geq \varrho$  auf  $M - U(p)$ , also  $B_{\varrho}^{d_{\mathcal{H}}^M}(p) \subseteq U(p) \subseteq U$ . Damit ist  $U$  offen in der Kobayashi Metrik, und die Proposition ist bewiesen.

///

**Proposition 5.7** *Es sei  $\pi : \hat{M} \rightarrow M$  eine holomorphe Überlagerungsprojektion zwischen zwei Riemannschen Flächen  $M$  und  $\hat{M}$ . Dann ist  $M$  hyperbolisch genau dann, wenn  $\hat{M}$  hyperbolisch ist.*

**Beweis:**

Ist  $M$  hyperbolisch und angenommen, es gibt  $\hat{p} \neq \hat{q} \in \hat{M}$  mit  $d_{\mathcal{H}}^{\hat{M}}(\hat{p}, \hat{q}) = 0$ . Als Überlagerungsprojektion existiert eine offene Umgebung  $U(\hat{p})$  von  $\hat{p}$  mit  $\pi|_{\overline{U(\hat{p})}}$  injektiv,  $\overline{U(\hat{p})}$  ist kompakt und  $\hat{q} \notin U(\hat{p})$ . Dann existiert mit Lemma 5.6 ein  $\hat{r} \in \partial U(\hat{p})$  mit  $d_{\mathcal{H}}^{\hat{M}}(\hat{p}, \hat{r}) = 0$ . Insbesondere ist  $\hat{p} \neq \hat{r}$ , also  $\pi(\hat{p}) \neq \pi(\hat{r})$ , da  $\pi|_{\overline{U(\hat{p})}}$  injektiv ist, und mit Proposition 5.2 folgt, da  $\pi$  holomorph ist und  $M$  hyperbolisch ist, dass

$$d_{\mathcal{H}}^{\hat{M}}(\hat{p}, \hat{r}) \geq d_{\mathcal{H}}^M(\pi(\hat{p}), \pi(\hat{r})) > 0.$$

Dies ist ein Widerspruch, und  $\hat{M}$  ist auch hyperbolisch.

Nun sei  $\hat{M}$  hyperbolisch. Zu  $p \neq q \in M$  wählen wir  $\hat{p} \in \hat{M}$  mit  $\pi(\hat{p}) = p$  und nach Definition 5.1 Punkte  $p_0, \dots, p_n \in M, p_0 = p, p_n = q, f_i : D \rightarrow M$  holomorph,  $z_i, w_i \in D$  mit  $f_i(z_i) = p_{i-1}, f_i(w_i) = p_i$ . Da  $\pi$  eine Überlagerungsprojektion ist und  $D$  einfach zusammenhängend ist, existieren mit Proposition B.3 oder z.B. mit [Jo] Theorem 1.3.1 sukzessive holomorphe Lifts  $\hat{f}_i : D \rightarrow \hat{M}$  mit  $\pi \circ \hat{f}_i = f_i, \hat{f}_1(z_1) = \hat{p}$  und  $f_i(z_i) = f_{i-1}(w_{i-1})$  für  $i = 2, \dots, n$ . Dies ergibt mit Definition 5.1

$$d_{\mathcal{H}}^{\hat{M}}(\hat{p}, \hat{f}_n(w_n)) \leq \sum_{i=1}^n d_{g_{\text{po in}}}^D(z_i, w_i).$$

Da  $\pi(\hat{f}_n(w_n)) = f_n(w_n) = p_n = q$ , erhalten wir

$$\inf_{\hat{q} \in \pi^{-1}(q)} d_{\mathcal{H}}^{\hat{M}}(\hat{p}, \hat{q}) \leq \sum_{i=1}^n d_{g_{\text{po in}}}^D(z_i, w_i)$$

und nach Übergang zum Infimum auf der rechten Seite

$$\inf_{\hat{q} \in \pi^{-1}(q)} d_{\mathcal{H}}^{\hat{M}}(\hat{p}, \hat{q}) \leq d_{\mathcal{H}}^M(p, q).$$

Angenommen das Infimum auf der linken Seite würde verschwinden, so existieren  $\hat{q}_k \in \pi^{-1}(q)$  mit  $d_{\mathcal{H}}^{\hat{M}}(\hat{p}, \hat{q}_k) \rightarrow 0$ , d.h.  $\hat{q}_k \rightarrow \hat{p}$  in der Kobayashi Metrik von  $\hat{M}$ . Da  $\hat{M}$  hyperbolisch ist, erzeugt die Kobayashi Metrik mit Proposition 5.4 die Topologie von  $\hat{M}$ , und wir haben  $\hat{q}_k \rightarrow \hat{p}$  in  $\hat{M}$ . Daraus folgt

$$q = \pi(\hat{q}_k) \rightarrow \pi(\hat{p}) = p,$$

im Widerspruch zu Annahme. Daher ist das Infimum positiv, also  $d_{\mathcal{H}}^M(p, q) > 0$ , und  $M$  ist hyperbolisch.

///

## 6 Die Sätze von Picard und Montel

**Proposition 6.1**  $\mathbb{C} - \{a, b\}, a \neq b \in \mathbb{C}$ , ist hyperbolisch.

**Beweis:**

Auf  $\mathbb{C} - \{a, b\}$  betrachten wir die hermitesche Metrik  $g := \lambda^2 g_{can}$  mit

$$\lambda(z)^2 := |z - a|^{\mu-2} |z - b|^{\mu-2} (1 + |z - a|^\mu) (1 + |z - b|^\mu)$$

für ein  $\mu > 0$ . Für die Gauß-Krümmung erhalten wir, da  $\log|\cdot|$  harmonisch ist,

$$\begin{aligned} K_g(z) &= -\Delta_g \log \lambda(z) = -\frac{1}{2\lambda(z)^2} \Delta_z \log(\lambda(z)^2) = \\ &= -\frac{1}{2\lambda(z)^2} \Delta_z \left( (\mu-2) \log |z - a| + (\mu-2) \log |z - b| + \log(1 + |z - a|^\mu) + \log(1 + |z - b|^\mu) \right) = \\ &= -\frac{2}{\lambda(z)^2} \partial_z \partial_{\bar{z}} \left( \log(1 + |z - a|^\mu) + \log(1 + |z - b|^\mu) \right) = \\ &= -\frac{\mu}{\lambda(z)^2} \partial_z \left( \frac{|z - a|^{\mu-2}(z - a)}{1 + |z - a|^\mu} + \frac{|z - b|^{\mu-2}(z - b)}{1 + |z - b|^\mu} \right) = \\ &= -\frac{\mu}{\lambda(z)^2} \left( \frac{|z - a|^{\mu-2}}{1 + |z - a|^\mu} + \left(\frac{\mu}{2} - 1\right) \frac{|z - a|^{\mu-2}}{1 + |z - a|^\mu} - \frac{\mu}{2} \frac{|z - a|^{2\mu-2}}{(1 + |z - a|^\mu)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{|z - b|^{\mu-2}}{1 + |z - b|^\mu} + \left(\frac{\mu}{2} - 1\right) \frac{|z - b|^{\mu-2}}{1 + |z - b|^\mu} - \frac{\mu}{2} \frac{|z - b|^{2\mu-2}}{(1 + |z - b|^\mu)^2} \right) = \\ &= -\frac{\mu^2}{2\lambda(z)^2} \left( \frac{|z - a|^{\mu-2}}{(1 + |z - a|^\mu)^2} + \frac{|z - b|^{\mu-2}}{(1 + |z - b|^\mu)^2} \right) = \\ &= -\frac{\mu^2}{2} \left( |z - b|^{2-\mu} (1 + |z - a|^\mu)^{-3} (1 + |z - b|^\mu)^{-1} + \right. \\ &\quad \left. + |z - a|^{2-\mu} (1 + |z - a|^\mu)^{-1} (1 + |z - b|^\mu)^{-3} \right). \end{aligned}$$

Für  $0 < \mu \leq 2/5$ , sehen wir  $K_g \leq -\kappa^2$  für ein  $\kappa > 0$ , und  $\mathbb{C} - \{a, b\}$  ist hyperbolisch mit Proposition 5.3.

///

**Satz 6.1 (Kleiner Satz von Picard)** Jede ganze holomorphe Funktion, die zwei Werte  $a \neq b \in \mathbb{C}$  auslässt, ist konstant.

Um den grossen Satz von Picard zu beweisen, beschreiben wir die Asymptotic der Kobayashi Metrik auf der zweifach punktierten Ebene in der folgenden Proposition beschreiben genauer.

**Proposition 6.2** In  $\mathbb{C} - \{a, b\}, a \neq b \in \mathbb{C}$  gilt

$$\lim_{z \rightarrow \{a, b, \infty\}} d_{\mathcal{H}}^{\mathbb{C} - \{a, b\}}(z, z_0) = \infty \quad \text{fur alle } z_0 \in \mathbb{C} - \{a, b\}, \quad (6.1)$$

insbesondere sind in der Kobayashi Metrik beschränkte, abgeschlossene Mengen in  $\mathbb{C} - \{a, b\}$  kompakt, und die Kobayashi Metrik von  $\mathbb{C} - \{a, b\}$  ist vollständig.

**Beweis:**

Zum Beweis von (6.1) betrachten wir die Riemannsche Metrik  $\lambda^2 g_{can}$  auf  $\mathbb{C} - \{0, 2\}$  aus Proposition 6.1 und die Metrik

$$g_{\dot{D}}(z) := \frac{1}{|z|^2 (\log |z|)^2} g_{can} \quad \text{auf } \dot{D} = D - \{0\}$$

aus der 5. Bemerkung nach Proposition 4.1, für die  $K_{\dot{D}} \equiv -1$  gilt. Weiter wählen wir ein Abschneidefunktion  $\varphi \in C_0^\infty(B_{3/4}(0))$  mit  $\varphi \equiv 1$  auf  $B_{1/2}(0)$ ,  $\varphi \geq 0$  und setzen

$$\eta^2(z) := \varphi^2(z) \frac{1}{|z|^2 (\log |z|)^2} \quad \text{für } z \in \dot{D}$$

und  $\tilde{g} := (\lambda^2 + \varepsilon^2 \eta^2) g_{can}$  auf  $\dot{D}$  für  $\varepsilon > 0$  und  $\tilde{g} = \lambda^2 g_{can}$  auf  $\mathbb{C} - \{\overline{B_{3/4}(0)} \cup \{2\}\}$ . Wir rechnen

$$\begin{aligned} K_{\tilde{g}} &= -\frac{1}{2} \Delta_{\tilde{g}} \log(\lambda^2 + \varepsilon^2 \eta^2) = -\frac{(1/2)}{\lambda^2 + \varepsilon^2 \eta^2} \Delta_z \log(\lambda^2 + \varepsilon^2 \eta^2) = \\ &= -\frac{2}{\lambda^2 + \varepsilon^2 \eta^2} \partial_{z\bar{z}} \log(\lambda^2 + \varepsilon^2 \eta^2) = -\frac{4}{\lambda^2 + \varepsilon^2 \eta^2} \partial_{\bar{z}} \left( \frac{\lambda \partial_z \lambda + \varepsilon^2 \eta \partial_z \eta}{\lambda^2 + \varepsilon^2 \eta^2} \right) = \\ &= -\frac{4(\lambda \partial_{z\bar{z}} \lambda + \varepsilon^2 \eta \partial_{z\bar{z}} \eta + \partial_{\bar{z}} \lambda \partial_z \lambda + \varepsilon^2 \partial_{\bar{z}} \eta \partial_z \eta)}{(\lambda^2 + \varepsilon^2 \eta^2)^2} + \frac{8(\lambda \partial_z \lambda + \varepsilon^2 \eta \partial_z \eta)(\lambda \partial_{\bar{z}} \lambda + \varepsilon^2 \eta \partial_{\bar{z}} \eta)}{(\lambda^2 + \varepsilon^2 \eta^2)^3} \leq \\ &\leq -\frac{4(\lambda \partial_{z\bar{z}} \lambda + \varepsilon^2 \eta \partial_{z\bar{z}} \eta + \partial_{\bar{z}} \lambda \partial_z \lambda + \varepsilon^2 \partial_{\bar{z}} \eta \partial_z \eta)}{(\lambda^2 + \varepsilon^2 \eta^2)^2} + \\ &\quad + \frac{8(\lambda^2 |\partial_z \lambda|^2 + \varepsilon^4 \eta^2 |\partial_z \eta|^2 + \varepsilon^2 \eta^2 |\partial_z \lambda|^2 + \varepsilon^2 \lambda^2 |\partial_z \eta|^2)}{(\lambda^2 + \varepsilon^2 \eta^2)^3} = \\ &= -4 \frac{\lambda \partial_{z\bar{z}} \lambda + \varepsilon^2 \eta \partial_{z\bar{z}} \eta - \partial_{\bar{z}} \lambda \partial_z \lambda - \varepsilon^2 \partial_{\bar{z}} \eta \partial_z \eta}{(\lambda^2 + \varepsilon^2 \eta^2)^2}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Andererseits wissen wir aus Proposition 6.1, dass

$$0 > -\kappa^2 \geq K_{\lambda^2 g_{can}} = -\frac{1}{\lambda^2} \Delta_z \log \lambda = -\frac{4}{\lambda^4} (\lambda \partial_{z\bar{z}} \lambda - \partial_{\bar{z}} \lambda \partial_z \lambda),$$

und weiter gilt

$$-1 \equiv K_{g_{\dot{D}}} = -\frac{1}{\eta^2} \Delta_z \log \eta = -\frac{4}{\eta^4} (\eta \partial_{z\bar{z}} \eta - \partial_{\bar{z}} \eta \partial_z \eta) \quad \text{auf } B_{1/2}(0) \subseteq [\varphi = 1].$$

Damit ergibt sich aus (6.2)

$$K_{\tilde{g}} \leq -4 \frac{\lambda \partial_{z\bar{z}} \lambda - \partial_{\bar{z}} \lambda \partial_z \lambda + \varepsilon^2 \eta \partial_{z\bar{z}} \eta - \varepsilon^2 \partial_{\bar{z}} \eta \partial_z \eta}{(\lambda^2 + \varepsilon^2 \eta^2)^2} \leq -\frac{\kappa^2 \lambda^4 + 4\varepsilon^2 (\eta \partial_{z\bar{z}} \eta - \partial_{\bar{z}} \eta \partial_z \eta)}{(\lambda^2 + \varepsilon^2 \eta^2)^2},$$

also

$$\begin{aligned} K_{\tilde{g}} &\leq -\frac{\kappa^2 \lambda^4 + \varepsilon^2 \eta^4}{(\lambda^2 + \varepsilon^2 \eta^2)^2} \leq -\frac{1}{2} \min(\kappa^2, \varepsilon^{-2}) < 0 \quad \text{in } B_{1/2}(0), \\ K_{\tilde{g}} &\leq -\kappa^2 < 0 \quad \text{in } D - \text{supp } \varphi \supseteq D - B_{3/4}(0), \end{aligned}$$

und

$$K_{\tilde{g}} \leq -\frac{\kappa^2 \lambda^4 - C_\eta \varepsilon^2}{(\lambda^2 + \varepsilon^2 \eta^2)^2} \leq -\kappa^2/2 < 0 \quad \text{in } B_{3/4}(0) - B_{1/2}(0)$$

für  $\varepsilon > 0$  klein genug. Insgesamt erhalten wir  $K_{\tilde{g}} \leq -\kappa_0^2 < 0$  für ein  $\kappa_0 > 0$  und mit Proposition 5.3, dass

$$d_{\mathcal{H}}^{\mathbb{C}-\{0,2\}}(p, q) \geq \kappa_0 d_{\tilde{g}}^{\mathbb{C}-\{0,2\}}(p, q) \quad \text{für } p, q \in \mathbb{C} - \{0, 2\}.$$

Da  $\int_0^{1/2} \frac{dt}{t \log |t|} = \infty$ , ist  $g_{\tilde{D}}$  und somit auch  $\tilde{g}$  vollständig bei 0, also

$$\lim_{z \rightarrow 0} d_{\mathcal{H}}^{\mathbb{C}-\{0,2\}}(z, z_0) \geq \lim_{z \rightarrow 0} \kappa_0 d_{\tilde{g}}^{\mathbb{C}-\{0,2\}}(z, z_0) = \infty,$$

und durch Anwenden geeigneter gebrochen linearen Abbildungen erhalten wir (6.1).

Nun sei  $A \subseteq \mathbb{C} - \{a, b\}$  in der Kobayashi Metrik beschränkt. Dann gibt es mit (6.1) keine Folge  $z_m \in A$  mit  $z_m \rightarrow z \in \{a, b, \infty\}$ . Damit ist  $A$  in  $\mathbb{C}$  mit der euklidischen Metrik beschränkt und  $d(a, A), d(b, A) > 0$ . Ist  $A$  weiter in  $\mathbb{C} - \{a, b\}$  abgeschlossen oder äquivalent mit Proposition 5.4 ist  $A$  in der Kobayashi Metrik abgeschlossen, so ist  $A$  in  $\mathbb{C}$  abgeschlossen, da  $d(a, A), d(b, A) > 0$ . Da  $A$  beschränkt in  $\mathbb{C}$  ist, ist  $A$  kompakt.

Da alle Cauchyfolgen beschränkt sind und der Abschluss beschränkter Mengen beschränkt bleibt, besitzt jede Cauchyfolge bezüglich der Kobayashi Metrik eine konvergente Teilfolge und ist damit bereits konvergent, insbesondere ist die Kobayashi Metrik vollständig, und die Proposition ist bewiesen.

///

### Bemerkung:

Die Menge  $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist abgeschlossen in  $\mathbb{C} - \{0, 2\}$ , aber in der Kobayashi Metrik von  $\mathbb{C} - \{0, 2\}$  nicht beschränkt und insbesondere nicht kompakt.

□

Der Satz von Montel, siehe [Ru] Theorem 10.28 und 14.6 oder [Sch-b] Satz 1.13, besagt, dass jede Folge lokal gleichmässig beschränkter holomorpher Funktionen eine auf kompakten Mengen gleichmässig konvergente Teilfolge besitzt. Mit der obigen Proposition kann dies erheblich verschärft werden.

**Satz 6.2 (Grosser Satz von Montel)** *Es sei  $M$  eine Riemannsche Fläche,  $a \neq b \in \mathbb{C}$  und*

$$f_m : M \rightarrow \mathbb{C} - \{a, b\} \subseteq S^2 \text{ holomorph.}$$

*Dann konvergiert für eine Teilfolge  $f_m \rightarrow f$  gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von  $M$  gegen eine holomorphe Abbildung  $f : M \rightarrow S^2$ , und  $f : M \rightarrow \mathbb{C} - \{a, b\}$  ist eine holomorphe Funktion oder  $f \in \{a, b, \infty\}$  ist konstant.*

### Beweis:

Da  $M$  als Riemannsche Fläche zusammenhängend ist und als Mannigfaltigkeit das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, genügt es  $M = D$  zu betrachten. Für eine Teilfolge konvergiert  $f_m(0) \rightarrow z_0 \in S^2$  mit der Konvergenz in  $S^2$ . Mit Proposition 5.2 haben wir

$$d_{\mathcal{H}}^{\mathbb{C}-\{a,b\}}(f_m(p), f_m(0)) \leq d_{\mathcal{H}}^D(p, 0) \leq C_\varrho \quad \text{für } p \in B_\varrho(0), \quad (6.3)$$

$0 < \varrho < 1$  und  $C_\varrho < \infty$ . Ist  $z_0 \in \mathbb{C} - \{a, b\}$ , so folgt, da  $d_{\mathcal{H}}^{\mathbb{C}-\{a,b\}}(z, z_0) \rightarrow \infty$  für  $z \rightarrow \infty$  mit Proposition 6.2 (6.1) und aus (6.3), dass

$$\sup_{m \in \mathbb{N}, p \in B_\varrho(0)} |f_m(p)| < \infty \quad \forall 0 < \varrho < 1,$$

und mit dem Satz von Montel konvergiert für eine Teilfolge  $f_m \rightarrow f$  gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von  $D$  gegen eine holomorphe Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Genauso folgt mit Proposition 6.2 (6.1) und aus (6.3), dass

$$\inf_{m \in \mathbb{N}, p \in B_\varrho(0)} |f_m(p) - a|, \inf_{m \in \mathbb{N}, p \in B_\varrho(0)} |f_m(p) - b| > 0 \quad \forall 0 < \varrho < 1,$$

und wir erhalten  $f : D \rightarrow \mathbb{C} - \{a, b\}$  wie gewünscht.

Ist  $z_0 \in \{a, b, \infty\}$ , so folgt wieder mit Proposition 6.2 (6.1) und (6.3), dass  $f_m \rightarrow z_0$  gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von  $D$ , also  $f_m \rightarrow f$  gleichmässig auf kompakten Teilmengen von  $D$  mit  $f \equiv z_0 \in \{a, b, \infty\}$  konstant, insbesondere  $f$  ist eine konstante, also holomorphe Abbildung  $D \rightarrow S^2$ .

///

Mit dem grossen Satz von Montel können wir nun den grossen Satzes von Picard beweisen.

**Satz 6.3 (Grosser Satz von Picard)** *Es sei  $f : D - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit einer wesentlichen Singularität bei 0. Dann gibt es höchstens ein  $a \in \mathbb{C}$ , für welche  $[f = a]$  endlich ist.*

**Beweis:**

Es sei  $f : \dot{D} = D - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} - \{a, b\}$  mit  $a \neq b \in \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion und  $f_\varrho := f(\varrho \cdot) : B_{1/\varrho}(0) - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} - \{a, b\}$  für  $0 < \varrho < 1$ . Mit dem grossen Satz von Montel, Satz 6.2, existiert  $\varrho_m \rightarrow 0$  mit  $f_{\varrho_m} \rightarrow f_0 : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow S^2$  gleichmässig auf kompakten Teilmenge von  $\mathbb{C} - \{0\}$ , und  $f_0 : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} - \{a, b\}$  ist holomorph oder  $f_0 \in \{a, b, \infty\}$  ist konstant. Da  $\mathbb{C} - \{a, b\}$  mit Proposition 6.1 hyperbolisch ist und  $d_{\mathcal{H}}^{\mathbb{C}-\{0\}} = 0$  mit der 2. Bemerkung nach Proposition 5.2, folgt mit Proposition 5.2, dass  $f_0$  konstant ist.

Zuerst betrachten wir  $f_0 \equiv z_0 \in \mathbb{C}$ . Wir entwickeln  $f$  in  $\dot{D}$  in eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad \text{für } z \in \dot{D} \quad (6.4)$$

mit  $c_n \in \mathbb{C}$  und erhalten die Laurent-Reihe von  $f_\varrho$  durch

$$f_\varrho(z) = f(\varrho z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n \varrho^n) z^n \quad \text{für } z \in B_{1/\varrho}(0) - \{0\}.$$

Mit elementarer Funktionentheorie rechnen wir

$$c_n \varrho_m^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_1(0)} \frac{f_{\varrho_m}(z)}{z^{n+1}} dz \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_1(0)} \frac{z_0}{z^{n+1}} dz = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} - \{0\} \text{ und } m \rightarrow \infty$$

und schliessen

$$c_n = 0 \quad \forall n < 0.$$

Damit ist die Laurent-Reihe in (6.4) eine Potenzreihe, und  $f$  lässt sich holomorph in  $0$  fortsetzen, also hat  $f$  in  $0$  keine wesentliche Singularität.

Im Fall  $f_0 \equiv \infty \in S^2$ , betrachten wir die holomorphe Funktion  $g := 1/(f - a) : D \rightarrow \mathbb{C} - \{0, 1/(b - a)\}$ , wobei wir beachten, dass  $b - a \neq 0$ , also  $1/(b - a) \neq 0, \infty$ . Mit dem obigen Argument erhalten wir  $g_{\varrho_m} = 1/(f_{\varrho_m} - a) \rightarrow 0 \in \mathbb{C}$  gleichmässig auf kompakten Teilmengen von  $\mathbb{C} - \{0\}$ , und  $g = 1/(f - a)$  lässt sich holomorph in  $0$  fortsetzen, also lässt sich  $f$  in  $0$  holomorph fortsetzen oder  $f$  hat einen Pol in  $0$ . In beiden Fällen hat  $f$  keine wesentliche Singularität in  $0$ , und der grosse Satz von Picard bewiesen.

///

### Bemerkung:

Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$z \in \mathbb{C} - \{0\} \mapsto \cosh(1/z) = \frac{e^{1/z} + e^{-1/z}}{2}$$

und zeigen, dass diese Funktion in jeder Umgebung ihrer wesentlichen Singularität  $0$  alle Werte in  $\mathbb{C}$  annimmt. Äquivalent müssen wir zeigen

$$\forall w \in \mathbb{C}, R > 0 : \exists z \in \mathbb{C}, |z| > R : \cosh z = w.$$

Zuerst sehen wir, da  $e^{2\pi i} = 1$ , dass  $\cosh(z + 2\pi i) = \cosh z$ , also existiert zu jedem  $w \in \cosh(\mathbb{C})$  und  $R > 0$  ein  $z \in \mathbb{C}, |z| > R$  mit  $\cosh z = w$ .

Es verbleibt  $\cosh(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$  zu zeigen. Dazu sehen wir für  $z, w \in \mathbb{C}$ , dass

$$\cosh z = w \iff e^{2z} - 2we^z + 1 = 0.$$

Nun hat das quadratische Polynom  $p(X) := X^2 - 2wX + 1$  mindestens eine Nullstelle  $X \in \mathbb{C}$ , und, da  $p(0) = 1 \neq 0$ , gilt  $X \neq 0$ . Da  $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$ , existiert ein  $z \in \mathbb{C}$  mit  $e^z = X$ , also  $\cosh z = w$  und somit  $\cosh(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ .

□

## Teil III

# Uniformisierung

## 7 Das Poisson-Problem

In diesem Paragraphen lösen wir das Poisson-Problem auf Riemannschen Flächen und zeigen damit die Existenz einer nicht-konstanten meromorphen Funktion auf jeder Riemannschen Fläche.

**Lemma 7.1 (Poisson-Problem)** *Es sei  $M$  eine Riemannsche Fläche mit einer hermiteschen Metrik  $g$  und  $\varphi \in C_0^\infty(M)$  mit  $\int_M \varphi \, d\mu_g = 0$ . Dann existiert eine beschränkte, glatte Lösung  $u \in C_{loc}^\infty(M) \cap L^\infty(M)$  des Poisson-Problems*

$$\Delta_g u = \varphi \quad \text{in } M.$$

□

Zum Beweis betrachten wir Sobolevräume auf Riemannschen Flächen.

**Definition 7.1** *Es sei  $M$  eine Riemannsche Fläche und  $g$  eine hermitesche Metrik auf  $M$ . Wir definieren  $W_{loc}^{1,2}(M) = W_{loc}^{1,2}(M, \mathbb{R})$  als die Menge der Funktionen  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ , für die für jede Karte  $z : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}$  die Verkettung*

$$u \circ z^{-1} \in W_{loc}^{1,2}(z(U)).$$

*Für  $g = \lambda^2 z^* g_{can}$  auf  $U(p)$  mit  $\lambda \in C_{loc}^\infty(U(p), ]0, \infty[)$  definieren wir den Gradienten und seine Länge bezüglich  $g$  durch*

$$\nabla_g u := [(z, \cdot, 2\lambda^{-2} \partial_{\bar{z}} u)] \in TM \quad \text{auf } U(p),$$

*siehe Definition 2.3,*

$$|\nabla_g u|_g := \sqrt{g(\nabla_g u, \nabla_g u)} = \lambda^{-1} |\nabla(u \circ z^{-1})| \quad \text{auf } U(p)$$

*und die Sobolevnorm durch*

$$\|u\|_{W^{1,2}(M,g)}^2 := \int_M (|\nabla_g u|_g^2 + |u|^2) \, d\mu_g.$$

*Den Sobolevraum definieren wir als den normierte Raum*

$$W^{1,2}(M, g) := \{u \in W_{loc}^{1,2}(M) \mid \|u\|_{W^{1,2}(M,g)} < \infty\},$$

*mit der Norm  $\|u\|_{W^{1,2}(M,g)}$  und der Identifikation von Funktionen, die  $\mu_g$ -fast überall gleich sind, und*

$$W_0^{1,2}(M, g) := \overline{C_0^\infty(M)}$$

*als den Abschluss in  $W^{1,2}(M, g)$ .*

*Das Skalarprodukt*

$$\langle u, v \rangle_{W^{1,2}(M,g)} := \int_M (g(\nabla_g u, \nabla_g v) + u \cdot v) \, d\mu_g$$

*erzeugt die obige Norm und macht  $W^{1,2}(M, g)$  zu einem inneren Produktraum.*

□

**Proposition 7.2** *Es sei  $M$  eine Riemannsche Fläche und  $g$  eine hermitesche Metrik auf  $M$ . Dann ist der Gradient als Tangentialvektor wohldefiniert, und für  $u, v \in W_{loc}^{1,2}(M)$  und eine Karte  $z : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $g = \lambda^2 z^* g_{can}$  auf  $U, \lambda \in C_{loc}^\infty(U, ]0, \infty[)$  und für jede Borelmenge  $B \subset \subset U$  gilt*

$$\int_B g(\nabla_g u, \nabla_g v) \, d\mu_g = \int_{z(B)} \nabla(u \circ z^{-1}) \cdot \nabla(v \circ z^{-1}) \, d\mathcal{L}^2. \quad (7.1)$$

und  $W^{1,2}(M, g)$  ist ein Hilbertraum.

□

### Beweis:

Für eine weitere Karte  $w : V \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $g = \eta^2 w^* g_{can}$  auf  $V, \eta \in C_{loc}^\infty(V, ]0, \infty[)$  haben wir mit Proposition 2.3.3. und Proposition 3.3 bzw. (4.1) und der Holomorphie von  $w \circ z^{-1}$ , dass

$$\begin{aligned} d(w \circ z^{-1})(z) \cdot (2\lambda^{-2} \partial_{\bar{z}} u) &= (w \circ z^{-1})'(z) \cdot (2\lambda^{-2} \partial_{\bar{w}} u \cdot \overline{\partial_z w}) = \\ &= 2\lambda^{-2} |(w \circ z^{-1})'(z)|^2 \partial_w u = 2\eta^{-2} \partial_w u \quad \text{auf } U \cap V, \end{aligned}$$

also

$$(z, \cdot, 2\lambda^{-2} \partial_{\bar{z}} u) \sim (w, \cdot, 2\eta^{-2} \partial_w u)$$

nach Definition 2.3, und der Gradient von  $u$  ist als Tangentialvektor wohldefiniert. Weiter rechnen wir

$$\begin{aligned} &\int_B g(\nabla_g u, \nabla_g v) \, d\mu_g = \\ &= \int_B \lambda^2 (z^* g_{can})([ (z, \cdot, 2\lambda^{-2} \partial_{\bar{z}} u), [(z, \cdot, 2\lambda^{-2} \partial_{\bar{z}} v)]]) \, d\lambda^2 z^{-1}(\mathcal{L}^2) = \\ &= \int_B 4g_{can}(dz \cdot [(z, \cdot, \partial_{\bar{z}} u)], [dz \cdot (z, \cdot, \partial_{\bar{z}} v)]) \, dz^{-1}(\mathcal{L}^2) = \\ &= \int_{z(B)} 4\operatorname{Re}(\partial_{\bar{z}} u \cdot \overline{\partial_{\bar{z}} v}) \circ z^{-1} \, d\mathcal{L}^2 = \int_{z(B)} \nabla(u \circ z^{-1}) \cdot \nabla(v \circ z^{-1}) \, d\mathcal{L}^2, \end{aligned}$$

also (7.1).

Klarerweise ist  $W^{1,2}(M, g)$  ein innerer Produktraum. Für eine Cauchyfolge  $u_n \in W^{1,2}(M, g)$  sehen wir mit (7.1), dass

$$\begin{aligned} &\int_{z(U_0)} \left( |\nabla u_n - \nabla u_m|^2 + |u_n - u_m|^2 \lambda^2 \right) \, d\mathcal{L}^2 \leq \\ &\leq \int_M \left( |\nabla_g(u_n - u_m)|_g^2 + |u_n - u_m|^2 \right) \, d\mu_g \rightarrow 0 \quad \text{für } n, m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

also ist  $u_n$  eine Cauchyfolge in  $L^2(\mu_g)$  und  $u_n \circ z^{-1}$  eine Cauchyfolge in  $W^{1,2}(U_0)$ . Daher konvergiert  $u_n \rightarrow u$  in  $L^2(\mu_g)$  und  $u_n \circ z^{-1} \rightarrow u \circ z^{-1}$  in  $W_{loc}^{1,2}(z(U))$  für alle Karten, insbesondere gilt  $u \in W_{loc}^{1,2}(M) \cap L^2(\mu_g)$ . Da  $M$  das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, konvergiert nach Übergang zu einer Teilfolge weiter  $u_n \rightarrow u$ ,  $\nabla_g u_n \rightarrow \nabla_g u$  fast überall bezüglich  $\mu_g$ . Dann erhalten wir mit dem Lemma von Fatou

$$\int_M \left( |\nabla_g(u_n - u)|_g^2 + |u_n - u|^2 \right) d\mu_g \leq \liminf_{m \rightarrow 0} \int_M \left( |\nabla_g(u_n - u_m)|_g^2 + |u_n - u_m|^2 \right) d\mu_g,$$

also  $u \in W^{1,2}(M, g)$  und

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{W^{1,2}(M)} \leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\|_{W^{1,2}(M)} = 0,$$

und  $u_n \rightarrow u$  in  $W^{1,2}(M, g)$ , d.h.  $W^{1,2}(M, g)$  ist vollständig und somit ein Hilbertraum.

///

Wichtig für unsere Untersuchung ist die Poincaré-Ungleichung.

**Proposition 7.3 (Poincaré-Ungleichung)** *Es sei  $M$  eine Riemannsche Fläche mit einer hermiteschen Metrik  $g$ ,  $\Omega \subseteq M$  offen mit kompaktem Abschluss  $\overline{\Omega} \subseteq M$  und  $w : U \subseteq M \xrightarrow{\sim} B_1(0)$  eine Karte. Dann gilt für jedes  $u \in W_{loc}^{1,2}(M)$  und*

$$c := \int_{B_{1/2}(0)} (u \circ w^{-1}) d\mathcal{L}^2$$

die Abschätzung

$$\int_{\Omega} |u - c|^2 d\mu_g \leq C \int_M |\nabla_g u|_g^2 d\mu_g$$

mit für ein  $C = C(M, g, \Omega, w) < \infty$ . Ist  $[u \neq 0] \subseteq \Omega$  und  $\overline{\Omega} \neq M$ , so kann  $c = 0$  gewählt werden.

**Beweis:**

Wir wählen Karten  $z_k : U_k \subseteq M \xrightarrow{\sim} B_1(0) \subseteq \mathbb{C}$ ,  $V_k := z_k^{-1}(B_{1/2}(0))$  mit  $M = \cup_k V_k$ . Mit der Poincaré-Ungleichung, siehe [GT] (7.45) bzw. [Sch-c] Satz 5.2, gilt für

$$c_k := \int_{B_{1/2}(0)} (u \circ z_k^{-1}) d\mathcal{L}^2$$

und ein universelle  $C < \infty$ , dass

$$\int_{B_{1/2}(0)} ((u - c_k) \circ z_k^{-1})^2 d\mathcal{L}^2 \leq C \int_{B_{1/2}(0)} |\nabla((u - c_k) \circ z_k^{-1})|^2 d\mathcal{L}^2 \leq C \int_M |\nabla_g u|_g^2 d\mu_g.$$

Mit der Substitutionsformel rechnen wir

$$\int_{z_l(V_k \cap V_l)} ((u - c_k) \circ z_l^{-1})^2 d\mathcal{L}^2 = \int_{z_k(V_k \cap V_l)} ((u - c_k) \circ z_k^{-1})^2 \cdot |\det(z_l \circ z_k^{-1})'| d\mathcal{L}^2 \leq$$

$$\leq C_{k,l} \int_{B_{1/2}(0)} ((u - c_k) \circ z_k^{-1})^2 d\mathcal{L}^2 \leq C_{k,l} \int_M |\nabla_g u|_g^2 d\mu_g.$$

Für  $V_k \cap V_l \neq \emptyset$  ergibt dies

$$\begin{aligned} |c_k - c_l|^2 &\leq C_{k,l} \int_{z_l(V_k \cap V_l)} ((c_k - c_l) \circ z_l^{-1})^2 d\mathcal{L}^2 \leq \\ &\leq C_{k,l} \int_{z_l(V_k \cap V_l)} ((u - c_k) \circ z_l^{-1})^2 d\mathcal{L}^2 + C_{k,l} \int_{z_l(V_k \cap V_l)} ((u - c_l) \circ z_l^{-1})^2 d\mathcal{L}^2 \leq C_{k,l} \int_M |\nabla_g u|_g^2 d\mu_g \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\int_{z_l(V_l)} ((u - c_k) \circ z_l^{-1})^2 d\mathcal{L}^2 \leq \\ &\leq 2 \int_{B_{1/2}(0)} ((u - c_l) \circ z_l^{-1})^2 d\mathcal{L}^2 + C|c_l - c_k|^2 \leq C_{k,l} \int_M |\nabla_g u|_g^2 d\mu_g. \end{aligned}$$

Da  $M$  zusammenhängend ist und alle  $V_k$  offen sind, lassen sich alle  $V_l$  mit  $V_k$  durch eine Kette  $V_{k_1}, \dots, V_{k_J}$  mit  $k_1 = k, k_J = l$  und

$$V_{k_{j-1}} \cap V_{k_j} \neq \emptyset \quad \text{für } j = 1, \dots, J$$

verbinden, und wir erhalten

$$\int_{z_l(V_l)} ((u - c_k) \circ z_l^{-1})^2 d\mathcal{L}^2 \leq C_{k,l} \int_M |\nabla_g u|_g^2 d\mu_g \quad \forall l.$$

Da  $\overline{\Omega}$  kompakt ist, wird  $\overline{\Omega}$  von endlich vielen  $V_{k_j}, j = 1, \dots, J$  überdeckt, und wir erhalten für  $g = z_{k_j}^*(\lambda_{k_j}^2 g_{can})$  auf  $U_{k_j}$  mit  $\lambda_{k_j} \in C_{loc}^\infty(U, ]0, \infty[)$  und  $c = c_k$ , dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u - c|^2 d\mu_g &\leq \sum_{j=1}^J \int_{V_{k_j}} |u - c|^2 d\mu_g = \sum_{j=1}^J \int_{z_{k_j}(V_{k_j})} |(u - c) \circ z_{k_j}^{-1}|^2 \lambda_{k_j}^2 d\mathcal{L}^2 \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^J C_{k_j}(g) \int_{z_{k_j}(V_{k_j})} |(u - c) \circ z_{k_j}^{-1}|^2 d\mathcal{L}^2 \leq C(M, g, \Omega, w) \int_M |\nabla_g u|_g^2 d\mu_g. \end{aligned}$$

Ist schliesslich  $[u \neq 0] \subseteq \Omega$  und  $\overline{\Omega} \neq M$ , so wählen wir eine Karte  $w : U \subseteq M - \overline{\Omega} \xrightarrow{\sim} B_1(0)$  und erhalten die Abschätzung mit  $c = 0$ . Damit ist die Poincaré-Ungleichung bewiesen.

///

Für die Regularität von Lösungen des Poisson-Problems auf offenen Mengen mit kompaktem Abschluss benötigen wir glatte Ränder.

**Definition 7.2** Eine offene Teilmenge  $\Omega$  einer Riemannschen Fläche  $M$  hat glatten oder  $C^\infty$ -Rand in  $p \in \partial\Omega$ , wenn eine Karte  $z : U(p) \subseteq M \xrightarrow{\sim} B_1(0) \subseteq \mathbb{C}$  mit  $p \in U(p)$ ,  $z(p) = 0$  und eine glatte Funktion  $\varphi : ]-\varrho, \varrho[ \rightarrow ]-1/4, 1/4[$  mit  $0 < \varrho < 1/2$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $Z := ]-\varrho, \varrho[ \times ]-1/2, 1/2[ \subseteq B_1(0)$  und

$$z(\Omega) \cap Z = \{(x, y) \in Z \mid y > \varphi(x)\} \quad (7.2)$$

existiert.

Wir sagen  $\Omega$  hat glatten oder  $C^\infty$ -Rand in  $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ , wenn  $\Omega$  glatten Rand in allen  $p \in \Gamma$  hat. Für  $\Gamma = \partial\Omega$  sagen wir kurz,  $\Omega$  hat glatten oder  $C^\infty$ -Rand.

□

Nun können wir das Poisson-Problem auf offenen Mengen mit kompaktem Abschluss und glattem Rand lösen.

**Proposition 7.4** Es sei  $M$  eine Riemannsche Fläche mit einer hermiteschen Metrik  $g$  und  $\Omega \subseteq M$  offen mit glattem Rand und kompaktem Abschluss  $\overline{\Omega} \subseteq M$ . Dann existiert zu jedem  $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$  mit  $\int_M \varphi \, d\mu_g = 0$  im Fall  $\Omega = M$  eine Lösung  $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$  des Poisson-Dirichlet-Problems

$$\Delta_g u = \varphi \quad \text{in } \Omega,$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

**Beweis:**

Wir betrachten  $V := W_0^{1,2}(\Omega)$  bzw.

$$V := \left\{ u \in W^{1,2}(\Omega) \mid \int_M u \, d\mu_g = 0 \right\}$$

im Fall  $\Omega = M$ . Da im zweiten Fall  $M = \overline{\Omega}$  kompakt ist, gilt  $W^{1,2}(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ , und in beiden Fällen haben wir  $V \subseteq W_0^{1,2}(\Omega)$ . Als abgeschlossener Unterraum von  $W^{1,2}(\Omega)$  ist  $V$  ein Hilbertraum, und die Bilinearform  $a$  auf  $V$ , definiert durch

$$a(u, v) := \int_\Omega g(\nabla_g u, \nabla_g v) \, d\mu_g,$$

ist symmetrisch und stetig auf  $V$ .

Für  $\overline{\Omega} \neq M$  haben wir mit der Poincaré-Ungleichung, Proposition 7.3, zuerst für  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ , dann für alle  $u \in V = W_0^{1,2}(\Omega)$ , dass

$$\int_M |u|^2 \, d\mu_g \leq C(M, g, \Omega) \int_M |\nabla_g u|_g^2 \, d\mu_g.$$

Ist  $\overline{\Omega} = M$ , so muss  $\partial\Omega = \emptyset$  sein, da  $\Omega$  mit glattem Rand vorge setzt ist. Dies ergibt  $\Omega = \overline{\Omega} = M$ , und wir haben mit der Poincaré-Ungleichung, Proposition 7.3, für alle  $u \in V$  ein geeignetes  $c \in \mathbb{R}$  mit

$$\int_M |u|^2 \, d\mu_g \leq \int_M |u - c|^2 \, d\mu_g \leq C(M, g) \int_M |\nabla_g u|_g^2 \, d\mu_g,$$

da  $\int_M u \, d\mu_g = 0$ .

In beiden Fällen haben wir

$$a(u, u) \geq c_0 \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 \quad \forall u \in V$$

und ein  $c_0 > 0$ , also ist  $a$  positiv-definit, d.h. ein Skalarprodukt auf  $V$ , und genauer erzeugt  $a$  eine zu  $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$  äquivalente Norm auf  $V$ , insbesondere ist  $V$  mit dem Skalarprodukt  $a$  ein Hilbertraum. Weiter ist  $\Lambda : v \in V \mapsto \int_M v \varphi \, d\mu_g$  ein stetiges, lineares Funktional auf  $V$ . Dann existiert mit dem Satz von Riesz ein eindeutiges  $u \in V$  mit  $a(u, v) = \Lambda v$  bzw.

$$\int_{\Omega} g(\nabla_g u, \nabla_g v) \, d\mu_g = - \int_M \varphi \cdot v \, d\mu_g \quad \forall v \in V.$$

Im Fall  $\Omega = M$  ist  $M = \overline{\Omega}$  kompakt, also  $0 < \mu_g(M) < \infty$ , und für jedes  $v \in W^{1,2}(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$  ist  $v_0 := v - \int_M v \, d\mu_g / \mu_g(M) \in V$ . Da in diesem Fall weiter  $\int_M \varphi \, d\mu_g = 0$ , erhalten wir  $u \in V \subseteq W_0^{1,2}(\Omega)$  und

$$\int_{\Omega} g(\nabla_g u, \nabla_g v) \, d\mu_g = - \int_M \varphi \cdot v \, d\mu_g \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad (7.3)$$

was im Fall  $\Omega \neq M$  trivial gilt, da in diesem Fall  $V = W_0^{1,2}(\Omega)$ .

Für eine Karte  $z : U \subseteq M \xrightarrow{\sim} B_1(0) \subseteq \mathbb{C}$  identifizieren wir  $U \cong B_1(0) \subseteq M$  und schreiben  $g = z^*(\lambda^2 g_{can})$  auf  $U$  mit  $\lambda \in C_{loc}^\infty(U, ]0, \infty[)$ . Mit (7.3) und (7.1) sehen wir für  $U_0 := B_1(0) \cap \Omega \neq \emptyset$  und  $v \in C_0^\infty(U_0) \subseteq W_0^{1,2}(M)$ , dass

$$\int_{U_0} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathcal{L}^2 = \int_M g(\nabla_g u, \nabla_g v) \, d\mu_g = - \int_M \varphi \cdot v \, d\mu_g = - \int_{U_0} \lambda^2 \varphi \cdot v \, d\mathcal{L}^2.$$

Damit ist  $u \in W_{loc}^{1,2}(U_0)$  eine lokale, schwache Lösung von  $\Delta u = \lambda^2 \varphi$  in  $U_0$ , und, da  $\lambda^2 \varphi \in C_{loc}^\infty(U_0)$ , folgt mit Standardtheorie für elliptische Gleichungen, siehe [GT] Theorem 8.10 bzw. [Sch-c] Korollar 6.6, dass  $u \in C_{loc}^\infty(U_0)$  und

$$\Delta_g u = \lambda^{-2} \Delta u = \varphi \quad \text{in } U_0.$$

Da die Karte beliebig war, folgt  $u \in C_{loc}^\infty(\Omega)$  und  $\Delta_g u = \varphi$  in  $\Omega$ , also löst  $u$  die Poisson-Gleichung.

Da  $\Omega$  glatten Rand hat, hat weiter  $U_0 = B_1(0) \cap \Omega$  in der Karte glatten Rand in  $B_1(0) \cap \partial U_0$ , und  $u$  hat schwache Nullrandwerte auf  $B_1(0) \cap \partial U_0$ . Mit Standardtheorie für elliptische Gleichungen, siehe [GT] Theorem 8.13 bzw. [Sch-c] Korollar 6.6, folgt  $u \in C_{loc}^\infty(U_0 \cup (B_1(0) \cap \partial U_0))$  und  $u = 0$  auf  $B_1(0) \cap \partial U_0$ . Da die Karte beliebig war, folgt  $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$  und  $u = 0$  auf  $\partial \Omega$ , wie gewünscht.

///

Mit der folgenden elementaren Proposition erhalten wir genügend viele offene Mengen mit kompaktem Abschluss und glattem Rand, um das Poisson-Problem auf der ganzen Riemannschen Fläche zu lösen. Zum Beweis verwenden wir zur Vereinfachung den Satz von Sard D.1, obwohl elementarer Argumente ausreichen könnten.

**Proposition 7.5** Zu jeder kompakten Teilmenge  $K$  einer Riemannschen Fläche  $M$  existiert eine offene Obermenge  $\Omega \supseteq K$  mit kompaktem Abschluss  $\overline{\Omega} \subseteq M$  und glattem Rand.

**Beweis:**

Da  $K$  kompakt ist, existieren endlich viele Karten  $z_l : U_l \subseteq M \xrightarrow{\sim} B_1(0) \subseteq \mathbb{C}, l = 1, \dots, k$ , mit  $K \subseteq \cup_{l=1}^k z_l^{-1}(B_{1/2}(0))$ . Wir wählen  $\eta \in C_0^\infty(B_1(0))$  mit  $0 \leq \eta \leq 1, \eta \equiv 1$  auf  $B_{1/2}(0)$ . Dann ist  $\tilde{\phi} := \sum_{l=1}^k (\eta \circ z_l) \in C_0^\infty(M), \tilde{\phi} \geq 0$  und  $\tilde{\phi} \geq 1$  in einer offenen Obermenge  $V \supseteq K$ . Nun betrachten wir  $\psi_0 \in C_{loc}^\infty(\mathbb{R})$  mit  $\psi_0(t) = e^{1-1/t}$  für  $t > 0$  und  $\psi_0(t) := 0$  für  $t \leq 0$ . Dann ist  $1 - \psi_0(1-t) = 1$  für  $t \geq 1$  und  $1 - \psi_0(1-0) = 1 - e^{1-(1/1)} = 0$  und  $0 \leq 1 - \psi_0(1-t) \leq 1$  für  $t \geq 0$ . Daher ist  $\phi := 1 - \psi_0(1 - \tilde{\phi}) \in C_{loc}^\infty(M)$  mit  $0 \leq \phi \leq 1, \phi \equiv 1$  auf  $V$  und  $[\tilde{\phi} = 0] \subseteq [\phi = 0]$ , also ist  $\text{supp } \phi \subseteq \text{supp } \tilde{\phi}$  kompakt und  $\phi \in C_0^\infty(M)$ .

Mit dem Satz von Sard, Satz D.1, und, da  $M$  das zweiten Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, existiert ein  $0 < t < 1$  mit  $d\phi \neq 0$  auf  $[\phi = t]$ . Dann ist  $\Omega := [\phi > t]$  eine offene Obermenge von  $K$  mit kompaktem Abschluss  $\overline{\Omega} \subseteq \text{supp } \phi \subseteq M$ . Da  $d\phi \neq 0$  auf  $[\phi = t] \supseteq \partial\Omega$ , hat  $\Omega$  mit dem Satz über implizite Funktionen glatten Rand  $\partial\Omega = [\phi = t]$ .

///

Damit können wir das Poisson-Problem auf der ganzen Riemannschen Fläche lösen.

**Beweis von Lemma 7.1:**

Wir wählen mit Proposition 7.5 und mit dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom, das  $M$  erfüllt, sukzessive offene Menge  $\text{supp } \varphi \subseteq \Omega_n$  mit kompaktem Abschluss  $\overline{\Omega_n} \subseteq \Omega_{n+1}$ , glattem Rand  $\partial\Omega_n \in C^\infty$  und mit  $M = \cup_{n=1}^\infty \Omega_n$ . Da  $\int_M \varphi d\mu_g = 0$ , existieren mit Proposition 7.4 glatte Lösungen  $u_n \in C^\infty(\overline{\Omega_n})$  des Poisson-Problems

$$\begin{aligned} \Delta_g u_n &= \varphi \quad \text{in } \Omega_n, \\ u_n &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_n. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Ist eines  $\Omega_n = M$ , insbesondere ist  $M$  kompakt, so ist  $u_n$  eine gewünschte beschränkte, glatte Lösung des Poisson-Problems auf ganz  $M$ . Daher betrachten wir im weiteren  $\Omega_n \neq M$ .

Wir setzen  $S_n := \sup_{\Omega_n} |u_n|$  und betrachten zuerst

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n < \infty. \tag{7.5}$$

In diesem Fall sind  $u_n$  gleichmässig beschränkt, und wir erhalten mit Standardtheorie für elliptische Gleichungen, siehe [GT] Theorem 6.2 und 6.17 bzw. [Sch-c] Satz 7.5, dass

$$\|u_n\|_{C^m(K)} \leq C_{M,g,K,\varphi,m} < \infty \quad \forall K \subseteq M \text{ kompakt.}$$

Nach Übergang zu einer Teilfolge konvergiert  $u_n \rightarrow u$  glatt auf kompakten Teilmengen von  $M$  mit  $u \in C_{loc}^\infty(M), |u| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n < \infty$  in  $M$  und

$$\Delta_g u \leftarrow \Delta_g u_n = \varphi,$$

also ist  $u$  eine gewünschte beschränkte, glatte Lösung des Poisson-Problems auf ganz  $M$ .

Ist (7.5) nicht erfüllt, so haben wir eine Teilfolge mit  $S_n \rightarrow \infty$ , insbesondere  $\varphi/S_n \rightarrow 0$  glatt auf  $M$  und  $|u_n/S_n| \leq 1$ . Dann erhalten wir wie eben mit Standardtheorie für elliptische Gleichungen, siehe [GT] Theorem 6.2 und 6.17 bzw. [Sch-c] Satz 7.5, dass

$$\|u_n/S_n\|_{C^m(K)} \leq C_{M,g,K,\varphi,m} < \infty \quad \forall K \subseteq M \text{ kompakt.}$$

Nach Übergang zu einer Teilfolge konvergiert  $u_n/S_n \rightarrow u$  glatt auf kompakten Teilmengen von  $M$  mit  $u \in C_{loc}^\infty(M)$ ,  $|u| \leq 1$  in  $M$  und

$$|\Delta_g u| \leftarrow |\Delta_g u_n/S_n| \leq |\varphi/S_n| \rightarrow 0,$$

also ist  $u$  harmonisch auf ganz  $M$ .

Nach Übergang zu einer Teilfolge und nach möglichem Ersetzen von  $\varphi$  durch  $-\varphi$ , können wir o.B.d.A.  $S_n = \sup_{\Omega_n} u_n = \sup_{\Omega_n} |u_n|$  annehmen. Da  $u_n$  auf der kompakten Menge  $\overline{\Omega_n}$  stetig ist, existiert  $p_n \in \overline{\Omega_n}$  mit

$$u_n(p_n) = \sup_{\Omega_n} u_n = S_n.$$

Da  $u_n = 0$  auf  $\partial\Omega_n$ , folgt mit  $S_n > 0$  für grosse  $n$ , dass  $p_n \in \Omega_n$ . Angenommen  $p_n \notin \text{supp } \varphi$ , so folgt  $p_n \in \Omega_n - \text{supp } \varphi$ . Nun ist  $u_n$  in der offenen Menge  $\Omega_n - \text{supp } \varphi$  harmonisch und nimmt im Inneren in  $p_n \in \Omega_n - \text{supp } \varphi$  sein globales Maximum an. Mit dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen, siehe [GT] Theorem 2.2 bzw. [Sch-c] Satz 2.2, ist  $u_n$  konstant auf der Zusammenhangskomponente  $Z_n$  der offenen Menge  $\Omega_n - \text{supp } \varphi$  mit  $p_n \in Z_n$ . Als Zusammenhangskomponente ist  $Z_n$  abgeschlossen in  $\Omega_n - \text{supp } \varphi$ , und daher gilt

$$\partial Z_n \subseteq \partial(\Omega_n - \text{supp } \varphi) \subseteq \partial\Omega_n \cup \text{supp } \varphi. \quad (7.6)$$

Ist  $\partial Z_n = \emptyset$ , so gilt  $Z_n = M$ , da  $M$  zusammenhängend ist, im Widerspruch zu  $Z_n \subseteq \Omega_n \neq M$ . Daher existiert  $\tilde{p}_n \in \partial Z_n$ , und mit der Stetigkeit von  $u_n$  sehen wir  $u(\tilde{p}_n) = u(p_n) = S_n > 0$ . Da  $u_n = 0$  auf  $\partial\Omega_n$ , folgt wieder  $\tilde{p}_n \in \Omega_n$ , also  $\tilde{p}_n \in \text{supp } \varphi$  mit (7.6). Somit existiert  $\tilde{p}_n \in \text{supp } \varphi$  mit

$$u(\tilde{p}_n) = \sup_{\Omega_n} u_n = S_n.$$

Da  $\text{supp } \varphi$  kompakt ist, erhalten wir  $\tilde{p}_n \rightarrow p \in M$  nach Übergang zu einer Teilfolge und mit der obigen gleichmässigen Konvergenz auf kompakten Mengen, dass

$$u(p) \leftarrow u_n(\tilde{p}_n)/S_n = 1.$$

Da  $u$  harmonisch und  $|u| \leq 1$  auf ganz  $M$  ist, folgt wieder mit dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen, siehe [GT] Theorem 2.2 bzw. [Sch-c] Satz 2.2, da  $M$  zusammenhängend ist, dass

$$u \equiv u(p) = 1. \quad (7.7)$$

Ist  $\inf_{\Omega_n} u_n < 0$  für eine Teilfolge, wählen wir wie oben  $q_n \in \text{supp } \varphi$  mit  $u(q_n) = \inf_{\Omega_n} u_n < 0$ . Dies ergibt wie oben nach Übergang zu einer Teilfolge mit  $q_n \rightarrow q \in M$  mit der obigen gleichmässigen Konvergenz auf kompakten Mengen, dass

$$u(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(q_n)/S_n \leq 0,$$

im Widerspruch zu (7.7).

Daher haben wir  $u_n \geq \inf_{\Omega_n} u_n \geq 0$  für grosse  $n$ . Für eine Karte  $z : U \subseteq M \xrightarrow{\sim} B_1(0) \subseteq \mathbb{C}$  und der Identifikation  $U \cong B_1(0) \subseteq M$  hat, da  $\partial\Omega_n$  glatten Rand hat, die Menge  $B_1(0) \cap \Omega_n$  glatten Rand in  $B_1(0) \cap \partial\Omega_n$ . Da  $u_n = 0$  auf  $\partial\Omega_n$  mit (7.4) und  $u_n \geq 0$ , sehen wir für die äussere Einheitsnormale  $\nu_{B_1(0) \cap \Omega_n}$ , dass

$$\partial_{\nu_{B_1(0) \cap \Omega_n}} u_n \leq 0 \quad \text{auf } B_1(0) \cap \partial\Omega_n. \quad (7.8)$$

Für  $\eta \in C_0^\infty(U)$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$  ergibt dies mit dem Divergenzsatz, dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} \Delta_g(u_n \eta) \, d\mu_g &= \int_{B_1(0) \cap \Omega_n} \Delta(u_n \eta) \, d\mathcal{L}^2 = \int_{B_1(0) \cap \partial\Omega_n} \partial_{\nu_{B_1(0) \cap \Omega_n}}(u_n \eta) \, d\text{area}_{B_1(0) \cap \partial\Omega_n} = \\ &= \int_{B_1(0) \cap \partial\Omega_n} \eta \cdot \partial_{\nu_{B_1(0) \cap \Omega_n}} u_n \, d\text{area}_{B_1(0) \cap \partial\Omega_n} \leq 0, \end{aligned} \quad (7.9)$$

da  $u_n = 0$  auf  $\partial\Omega_n$ . Wählen wir eine Partition der Eins, wie z.B. in [Sch-a] §B,  $0 \leq \eta_l \leq 1$ ,  $\sum_{l=1}^k \eta_l \equiv 1$  auf  $\overline{\Omega_n}$  und mit  $\eta_l \in C_0^\infty(U_l)$  mit Karten  $z_l : U_l \subseteq M \xrightarrow{\sim} B_1(0) \subseteq \mathbb{C}$ ,  $l = 1, \dots, k$ , so erhalten wir

$$\int_{\Omega_n} \Delta_g u_n \, d\mu_g = \int_{\Omega_n} \Delta_g \left( u_n \sum_{l=1}^k \eta_l \right) \, d\mu_g = \sum_{l=1}^k \int_{\Omega_n} \Delta_g(u_n \eta_l) \, d\mu_g \leq 0. \quad (7.10)$$

Andererseits haben wir, da  $\text{supp } \varphi \subseteq \Omega_n$ , nach Voraussetzung an  $\varphi$  mit (7.4), dass

$$\int_{\Omega_n} \Delta_g u_n \, d\mu_g = \int_M \varphi \, d\mu_g = 0,$$

und daher müssen alle Integrale in (7.10) verschwinden. Da  $\sum_{l=1}^k \eta_l \equiv 1$  auf  $\overline{\Omega_n}$ , existiert zu jedem  $p \in \partial\Omega_n$  ein  $l \in \{1, \dots, k\}$  mit  $\eta_l(p) > 0$ , insbesondere  $p \in \text{supp } \eta_l \subseteq U_l$ . Mit (7.9) mit  $z = z_l$ ,  $U = U_l$ ,  $\eta = \eta_l$  erhalten wir  $\partial_{\nu_{B_1(0) \cap \Omega_n}} u_n(p) = 0$ . Da  $p \in \partial\Omega_n$  beliebig war, verschärft sich (7.8) zu

$$\partial_{\nu_{B_1(0) \cap \Omega_n}} u_n = 0 \quad \text{auf } B_1(0) \cap \partial\Omega_n.$$

Setzen wir  $u_n$  mit  $u_n := 0$  auf  $M - \overline{\Omega_n}$  fort, so sehen wir  $u_n \in C^{1,1}(M) \cap C_{loc}^\infty(M - \partial\Omega_n)$  mit  $\Delta u_n = 0$  in  $B_1(0) - \partial\Omega_n$  für Karten mit  $U \cap \text{supp } \varphi = \emptyset$ . Dann ergibt sich für  $\eta \in C_0^\infty(B_1(0))$  mit dem Divergenzsatz

$$\int_{B_1(0)} u_n \cdot \Delta \eta \, d\mathcal{L}^2 = \int_{B_1(0) \cap \Omega} u_n \cdot \Delta \eta \, d\mathcal{L}^2 = \int_{B_1(0) \cap \Omega} \Delta u_n \cdot \eta \, d\mathcal{L}^2 = 0,$$

und mit dem Lemma von Weyl, siehe [GT] Exercise 2.8 bzw. [Sch-c] Lemma 2.1, ist  $u_n$  harmonisch in  $B_1(0)$ , insbesondere  $u_n \in C_{loc}^\infty(B_1(0))$ , also  $u_n \in C_{loc}^\infty(M)$ . Klarerweise ist dann  $u_n$  beschränkt auf ganz  $M$  und  $\Delta_g u_n = 0$  in  $M - \text{supp } \varphi$ , zusammen ist  $u_n$  eine gewünschte beschränkte, glatte Lösung des Poisson-Problems auf ganz  $M$ . Damit ist die Proposition bewiesen.

///

Mit der Lösung des Poisson-Problems erhalten wir die Existenz einer nicht-konstanten meromorphen Funktion auf jeder Riemannschen Fläche. Dazu setzen wir zuerst den Realteil einer holomorphen Funktion global fort.

**Proposition 7.6 (Existenz einer beschränkten harmonischen Fortsetzung)** *Es sei  $M$  eine Riemannsche Fläche und  $f$  eine holomorphe Funktion in einer punktierten offenen Umgebung eines Punktes  $p \in M$ . Dann existiert eine harmonische Funktion  $u$  auf  $M - \{p\}$  mit*

$$\lim_{q \rightarrow p} (u(q) - \operatorname{Re}(f)(q)) = 0,$$

*$u$  ist beschränkt im Komplement jeder Umgebung von  $p$ .*

**Beweis:**

Wir wählen eine Karte  $z : U(p) \subseteq M \xrightarrow{\sim} B_1(0) \subseteq \mathbb{C}, p \in U(p), z(p) = 0$  mit  $f$  holomorph in  $U(p) - \{p\}$ , identifizieren  $U \cong B_1(0) \subseteq M$  und schreiben  $g = \lambda^2 z^* g_{can}$  auf  $U$  mit  $\lambda \in C_{loc}^\infty(U, ]0, \infty[)$ . Weiter wählen wir  $\eta \in C_0^\infty(B_1(0))$  mit  $\eta \equiv 1$  auf  $B_{1/2}(0)$  und setzen  $\phi := \eta \cdot f \in C_{loc}^\infty(M - \{p\})$ . Da  $f$  holomorph in  $U(p) - \{p\} \cong B_1(0) - \{0\}$  ist, hat  $\partial_{\bar{z}}\phi$  kompakten Träger in  $B_1(0) - \{0\}$ , und wir betrachten  $\partial_{\bar{z}}\phi \in C_0^\infty(B_1(0) - \{0\}) \subseteq C_0^\infty(M, \mathbb{C})$ . Mit dem Divergenzsatz rechnen wir

$$\int_M \Delta_g \phi \, d\mu_g = \int_{B_1(0)} 4\partial_{z\bar{z}}\phi \, d\mathcal{L}^2 = 0,$$

und mit Lemma 7.1 existiert eine beschränkte, glatte Lösung  $\tilde{u} \in C_{loc}^\infty(M) \cap L^\infty(M)$  des Poisson-Problems

$$\Delta_g \tilde{u} = -\Delta_g \operatorname{Re}(\phi) \quad \text{in } M.$$

Damit ist  $u := \tilde{u} + \operatorname{Re}(\phi) \in C_{loc}^\infty(M - \{p\})$  harmonisch in  $M - \{p\}$  und

$$u(q) = \tilde{u}(q) \text{ ist beschränkt für } q \in M - \operatorname{supp} \eta \supseteq M - B_1(0),$$

$$u(z) - \operatorname{Re}(f(z)) = \tilde{u}(z) \text{ ist beschränkt für } z \in B_{1/2}(0) - \{0\},$$

da  $\operatorname{supp} \eta \subseteq B_1(0)$  und  $\eta \equiv 1$  in  $B_{1/2}(0)$ . Klarerweise ist  $u$  für jede offene Umgebung  $V(p)$  von  $p$  auf der kompakten Menge  $\operatorname{supp} \eta - V(p) \subseteq M - \{p\}$  beschränkt, also ist  $u$  beschränkt im Komplement jeder Umgebung von  $p$ . Weiter gilt

$$\lim_{z \rightarrow 0} (u(z) - \operatorname{Re}(f(z))) = \lim_{z \rightarrow 0} \tilde{u}(z) = \tilde{u}(0),$$

und nach Addition einer Konstanten können wir  $\tilde{u}(0) = 0$  annehmen. Damit ist die Proposition bewiesen.

///

**Bemerkung:**

Jede beschränkte, harmonische Funktion  $v$  in der punktierten Kreisscheibe  $D - \{0\}$  setzt glatt in den Punkt  $0$ , denn für geeignetes  $\alpha \in \mathbb{R}$  existiert eine holomorphe Funktion

$h$  in  $D - \{0\}$  mit  $Re(h) = v - \alpha \log |\cdot|$ , und diese hat eine hebbare Singularität in  $0$ . Damit ist  $Re(h) = v - \alpha \log |\cdot|$  beschränkt bei  $0$ , also  $\alpha = 0$ , und  $Re(h)$  ist eine glatte Fortsetzung von  $v$  auf  $D$ .

Insbesondere setzt oben  $u - Re(f)$  glatt in den Punkt  $p \in M$  fort.

□

**Satz 7.1 (Existenz einer nicht-konstanten meromorphen Funktion)**

Auf jeder Riemannschen Fläche  $M$  existiert eine nicht-konstante meromorphe Funktion  $M \rightarrow S^2$ .

**Beweis:**

Wir betrachten  $p_1 \neq p_2 \in M$  und Karten  $z_j : U(p_j) \subseteq M \xrightarrow{\cong} B_1(0) \subseteq \mathbb{C}, p_j \in U(p_j), z_j(p_j) = 0$ . Nun sind  $1/z_j$  holomorph in  $U(p_j) - \{p_j\}$ , und mit Proposition 7.6 existieren reellwertige, harmonische Funktionen  $u_j$  auf  $M - \{p_j\}$  mit

$$u_j - Re(1/z_j) \text{ setzt glatt in } p_j \cong 0 \text{ fort.} \quad (7.11)$$

Für eine beliebige Karte  $z : U \rightarrow \mathbb{C}$  sind mit Proposition 2.2 und Proposition 2.3.1. die Funktionen  $\partial_z u_j$  holomorph in  $U - \{p_j\}$ . Für eine weitere Karte  $w : V \rightarrow \mathbb{C}$  sehen wir mit Proposition 2.3.3. und der Holomorphie von  $w \circ z^{-1}$ , dass

$$\partial_z u_j = \partial_w u_j \cdot \partial_z w \quad \text{auf } U \cap V - \{p_j\}. \quad (7.12)$$

Ist  $\partial_z u_j \equiv 0$  in  $U - \{p_j\}$ , so verschwindet  $\partial_w u_j$  für alle Karten mit dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen, da  $M - \{p_j\}$  zusammenhängend ist, und wir erhalten  $du_j \equiv 0$  auf  $M - \{p_j\}$ , da  $u_j$  reellwertig ist. Damit ist  $u_j$  konstant auf  $M - \{p_j\}$ , womit aber (7.11) nicht gelten kann.

Daher können sich die Nullstellen von  $\partial_z u_j$  in  $U - \{p_j\}$  nicht häufen, und  $f_z := \partial_z u_1 / \partial_z u_2$  ist meromorph in  $U - \{p_1, p_2\}$ . Mit (7.12) sehen wir  $f_w = f_z$  auf  $U \cap V - \{p_1, p_2\}$ , und dies definiert eine meromorphe Funktion  $f$  auf  $M - \{p_1, p_2\}$  mit  $f = f_z = \partial_z u_1 / \partial_z u_2$  für alle Karten. Mit (7.12) und den Cauchy-Abschätzungen für harmonische Funktionen, siehe [GT] Theorem 2.10 bzw. [Sch-c] Satz 2.5, ist

$$\partial_z(u_j - Re(1/z_j)) = \partial_z u_j - \frac{1}{2}(1/z_j)' = \partial_z u_j + 1/(2z_j^2)$$

beschränkt in einer punktierten Umgebung von  $p_j \cong 0$ , also  $\lim_{q \rightarrow p_j} \partial_z u_j(q) = \infty$ , und  $f$  hat einen Pol in  $p_1$  und eine Nullstelle in  $p_2 \neq p_1$ . Damit ist  $f$  meromorph auf ganz  $M$  und nicht konstant, wie gewünscht.

///

Auf kompakten Riemannschen Flächen ergibt die Existenz einer nicht-konstanten meromorphen Funktion deren Triangulierbarkeit. Dies schliesst den Beweis des Satzes von Gauss-Bonnet 4.1 ohne die Verwendung des Satzes von Rado über die Triangulierbarkeit kompakter Flächen.

**Satz 7.2 (Triangulierbarkeit kompakter Riemannscher Flächen)** Jede kompakte Riemannsche Fläche ist triangulierbar.

**Beweis:**

Mit Satz 7.1 existiert eine nicht-konstante meromorphe Funktion  $f : M \rightarrow S^2$ . Da  $M$  kompakt ist, hat  $f$  nur endlich viele Verzweigungspunkte, d.h. Punkte  $p \in M$  mit  $df_p = 0$ , und nach einer Rotation von  $S^2$  können wir annehmen, dass keines der Urbilder  $p \in f^{-1}(\infty)$  ein Verzweigungspunkt ist. Die endlich vielen Verzweigungspunkte haben nur endlich viele Bilder, die singulären Werte. Da  $M$  kompakt ist, ist jede Faser  $f^{-1}(q)$  für  $q \in S^2$  endlich, und  $p_1, \dots, p_N \in M$  seien die paarweise verschiedenen Urbilder der endlich vielen singulären Werte  $q_n := f(p_n) \in \mathbb{C}$  von  $f$ . Insbesondere sind alle Verzweigungspunkte von  $f$  in  $p_1, \dots, p_N$  enthalten bzw.

$$df_p \neq 0 \quad \forall p \in M - \{p_1, \dots, p_N\}. \quad (7.13)$$

Mit Definition 4.3 existieren für die identische Karte  $w : \mathbb{C} \subseteq S^2 \rightarrow \mathbb{C}$  Karten  $z_n : U(p_n) \subseteq M \xrightarrow{\sim} B_{2\rho_n}(0)$  mit  $p_n \in U(p_n)$ ,  $\rho_n > 0$  und

$$f \circ z_n^{-1} = q_n + id^{m_n}, \quad (7.14)$$

$m_n \in \mathbb{N}$ , insbesondere  $f(U(p_n)) = B_{\rho_n^{m_n}}(q_n) \subseteq \mathbb{C}$ . Weiter wählen wir  $\rho_n := \rho^{1/m_n}$  so klein, dass  $f(U(p_n)) = B_{\rho}(q_n) \subseteq \mathbb{C}$ ,  $B_{2\rho}(q_n)$  paarweise disjunkt sind und  $U(p_n)$  paarweise disjunkt sind.

Nun ist  $f^{-1}(\{q_1, \dots, q_N\}) = \{p_1, \dots, p_N\}$  bzw.

$$f^{-1}(S^2 - \{q_1, \dots, q_N\}) = M - \{p_1, \dots, p_N\}.$$

Da weiter  $f$  mit Proposition 4.5 surjektiv ist und  $df \neq 0$  in  $M - \{p_1, \dots, p_N\}$  mit (7.13), ist

$$f|_{S^2 - \{q_1, \dots, q_N\}} \rightarrow M - \{p_1, \dots, p_N\} \text{ surjektiv}$$

und ein lokaler Diffeomorphismus. Da wie schon bemerkt alle Fasern von  $f$  endlich sind, ist

$$f|_{S^2 - \{q_1, \dots, q_N\}} \rightarrow M - \{p_1, \dots, p_N\} \text{ eine Überlagerungsprojektion.} \quad (7.15)$$

Nun wählen wir eine Triangulierung  $\{T_k\}$  von  $S^2$ , die alle singulären Werte  $q_1, \dots, q_N$  als Ecken enthält und die in allen  $\overline{B_{\rho}(q_n)}$  für ein  $M \geq 3$  genau die Flächen

$$T_{q_n, m} := q_n + \{re^{i\varphi} \mid 2\pi m/M \leq \varphi \leq 2\pi(m+1)/M, 0 \leq r \leq \rho\} \quad \text{für } m = 0, \dots, M-1$$

enthält. Insbesondere sind die Kanten der Triangulierung in  $\overline{B_{\rho}(q_n)}$  gerade

$$\Gamma_{q_n, m} := q_n + \{re^{2\pi im/M} \mid 0 \leq r \leq \rho\} \quad \text{für } m = 0, \dots, M-1$$

und

$$\Gamma'_{q_n, m} := q_n + \{\rho e^{i\varphi} \mid 2\pi m/M \leq \varphi \leq 2\pi(m+1)/M\} \quad \text{für } m = 0, \dots, M-1,$$

und die Ecken der Triangulierung in  $\overline{B_{\rho}(q_n)}$  gerade

$$q_n, q_n + \rho e^{2\pi im/M}, \quad \text{für } m = 0, \dots, M-1,$$

Wir triangulieren den Abschluss von  $B_{\rho^{1/m_n}}(p_n) := z_n^{-1}(B_{\rho^{1/m_n}}(0)) \subseteq U(p_n)$  mit (7.14) in der gleichen Weise mit  $M$  ersetzt durch  $Mm_n \in \mathbb{N}$  in die Flächen  $\hat{T}_{n, m}, m =$

$0, \dots, Mm_n - 1$ . Wir sehen, die Flächen dieser Triangulierung werden durch  $f$  auf Flächen der obigen Triangulierung von  $\overline{B_\varrho(q_n)}$  abgebildet, genauer

$$f(\hat{T}_{n,m}) = T_{q_n,r} \quad (7.16)$$

für  $m = sM + r, s = 0, \dots, m_n - 1, r = 0, \dots, M - 1$ .

Da  $S^2 - \cup_{n=1}^N B_\varrho(q_n)$  kompakt ist, können wir die Triangulierung  $\{T_k\}$  von  $S^2$  ausserhalb von  $S^2 - \cup_{n=1}^N B_\varrho(q_n)$  so fein wählen, dass jedes  $T_k \subseteq S^2 - \cup_{n=1}^N B_\varrho(q_n)$  in einer offenen Menge  $U \subseteq S^2 - \{q_1, \dots, q_N\}$  enthalten ist, für die  $f^{-1}(U) = \sum_j V_j$ ,  $V_j$  offen und  $f|_{V_j} \xrightarrow{\sim} U$  ist ein Homöomorphismus wie in Definition B.1 bzw. ist in diesem Fall sogar ein Diffeomorphismus. Wir setzen  $\hat{T}_{k,j} := f^{-1}(T_k) \cap V_j$  und zeigen,  $\hat{T}_{k,j}$  bilden zusammen mit obigen Flächen  $\hat{T}_{n,m}$  in  $\overline{B_{\varrho^{1/m_n}}(p_n)}$  eine Triangulierung von  $M$ .

Alle Flächen  $\hat{T}_{k,j}$  bzw.  $\hat{T}_{n,m}$  werden durch  $f$  auf eine der Flächen  $T_k$  der Triangulierung von  $S^2$  abgebildet. Nach obiger Konstruktion schneiden sich zwei der Flächen  $\hat{T}_{n,m}$  nur in einer gemeinsamen Kante oder in einer gemeinsamen Ecke, wenn wir  $Mm_n \geq 3$  beachten. Nun habe  $\hat{T}_{k,j}$  mit einer weiteren Fläche  $\hat{T} = \hat{T}_{k',j'} \neq \hat{T}_{k,j}$  oder  $\hat{T} = \hat{T}_{n,m}$  einen nicht-leeren Schnitt. Da  $\hat{T}_{k,j} \subseteq V_j$  und  $\{V_{j'}\}_{j'}$  paarweise disjunkt sind, ist  $\hat{T}_{k,j} \cap \hat{T}_{k',j'} = \emptyset$  für  $j \neq j'$ , also ist  $\hat{T} \neq \hat{T}_{k,j'}$ , und  $f(\hat{T}_{k,j}) = T_k \neq T_l := f(\hat{T})$  sind zwei verschiedene Flächen der Triangulierung  $\{T_k\}$  von  $S^2$ . Daher schneiden sich  $f(\hat{T}_{k,j}) = T_k$  und  $f(\hat{T}) = T_l$  in einer gemeinsamen Ecke oder einer gemeinsamen Kante, also ist der Schnitt

$$\hat{T}_{k,j} \cap \hat{T} = (f|_{V_j})^{-1}(f(\hat{T}_{k,j}) \cap f(\hat{T}))$$

eine gemeinsame Ecke oder eine gemeinsame Kante.

Schliesslich müssen wir zeigen, dass  $\hat{T}_{k,j}$  und  $\hat{T}_{n,m}$  ganz  $M$  überdecken. Klarerweise ist

$$\cup_{n=1}^N \overline{B_{\varrho^{1/m_n}}(p_n)} = \cup_{n=1}^N \cup_{m=1}^{Mm_n} \hat{T}_{n,m}.$$

Für  $p \in f^{-1}(S^2 - \cup_{n=1}^N B_\varrho(q_n))$  ist  $f(p) \in T_k \subseteq S^2 - \cup_{n=1}^N B_\varrho(q_n)$  für ein  $k$ , und mit obiger Konstruktion ist  $T_k \subseteq U$  und  $p \in f^{-1}(U) = \sum_j V_j$ , also  $p \in f^{-1}(T_k) \cap V_j = \hat{T}_{k,j}$ . Dies ergibt

$$f^{-1}(S^2 - \cup_{n=1}^N B_\varrho(q_n)) \subseteq \cup_{k,j} \hat{T}_{k,j},$$

und es verbleibt zu zeigen, dass

$$M = \cup_{n=1}^N \overline{B_{\varrho^{1/m_n}}(p_n)} \cup f^{-1}(S^2 - \cup_{n=1}^N B_\varrho(q_n))$$

bzw.

$$f(M - \cup_{n=1}^N \overline{B_{\varrho^{1/m_n}}(p_n)}) \subseteq S^2 - \cup_{n=1}^N B_\varrho(q_n). \quad (7.17)$$

Da  $\{p_1, \dots, p_N\} = \cup_{n=1}^N f^{-1}(q_n)$ , haben wir für  $q \in \{q_1, \dots, q_N\}$  mit Definition 4.3 und Proposition 4.5 und (7.14), dass

$$\deg f = \deg_q f = \sum_{q_n=q} m_n,$$

und für  $q' \in B_\varrho(q) - \{q\}$  mit (7.14), dass

$$\sum_{q_n=q} \#(f^{-1}(q') \cap B_{\varrho^{1/m_n}}(p_n)) = \sum_{q_n=q} m_n = \deg f = \deg_{q'} f \geq \#(f^{-1}(q')),$$

also

$$f^{-1}(\cup_{n=1}^N B_{\varrho}(q_n)) \subseteq \cup_{n=1}^N B_{\varrho^{1/m_n}}(p_n).$$

Dies ergibt (7.17), und der Satz ist bewiesen.

///

## 8 Das globale Maximumprinzip auf Riemannschen Flächen

Wir unterscheiden zwischen Riemannschen Flächen, auf denen ein globales Maximumprinzip gilt oder nicht.

**Definition 8.1** Wir sagen eine Riemannsche Fläche  $M$  erfüllt das globale Maximumprinzip oder  $M$  ist eine Riemannsche Fläche mit globalem Maximumprinzip, wenn für  $U \subseteq M, \neq M$ , offen und  $u$  stetig und nach oben beschränkt auf  $\overline{U}$  und subharmonisch in  $U$  die Abschätzung

$$u(p) \leq \sup_{q \in \partial U} u(q) \quad \text{für alle } p \in U, \quad (8.1)$$

gilt.

Erfüllt  $M$  das globale Maximumprinzip nicht, so sagen wir auch,  $M$  ist eine Riemannsche Fläche ohne globales Maximumprinzip.

□

### Bemerkungen:

1. In unserer Definition 2.6 sind subharmonische Funktionen glatt.
2. Nimmt eine subharmonische Funktion in einer offen, zusammenhängenden Menge  $U \subseteq M$  ein lokales Maximum an, so ist  $u$  mit dem Maximumprinzip für subharmonische Funktionen, siehe [GT] Theorem 2.2 bzw. [Sch-c] Satz 2.2, konstant auf  $U$ .

Da stetige Funktionen auf kompakten Menge immer ein globales Maximum annehmen, folgt für  $U \subseteq M, \neq M$ , offen mit kompaktem Abschluss  $\overline{U} \subseteq M$  und  $u$  stetig auf  $\overline{U}$  und subharmonisch in  $U$ , dass

$$u(p) \leq \sup_{q \in \partial U} u(q) \quad \text{für alle } p \in U, \quad (8.2)$$

also gilt das Maximumprinzip auf offenen Mengen  $U \neq M$  mit kompaktem Abschluss immer, und insbesondere erfüllen kompakten Riemannsche Flächen das globale Maximumprinzip immer.

3. Auf Riemannschen Flächen mit globalem Maximumprinzip ist die harmonische Fortsetzung in Proposition 7.6 eindeutig, wie man durch Subtraktion zweier Fortsetzungen und Anwendung des globalen Maximumprinzips auf  $M - U_n(q)$  für offene Umgebungsbasis  $U_n(q)$  von  $q$  sieht.
4. Das globale Maximumprinzip gilt nicht auf  $D$ . wie  $u(z) := \log |z|$  für  $z \neq 0$  und  $U = D - \overline{B_{1/2}(0)}$  zeigt.
5. Für  $M = \mathbb{C}$  in Definition 8.1 ist  $u_\delta(z) : z \mapsto u(z) - \delta \log |z|$  für  $z \in \overline{U} - \{0\}$  subharmonisch in  $U_\delta := U - \overline{B_\delta(0)}$  und stetig und nach oben beschränkt auf  $\overline{U_\delta}$ , insbesondere  $u_\delta(z) \leq \sup_{\partial U_\delta} u_\delta$  für  $|z| \geq R = R_{\delta, \delta}$ , und mit dem Maximumprinzip (8.2) auf  $U_\delta \cap B_R(0)$  folgt

$$\sup_{U_\delta \cap B_R(0)} u_\delta \leq \sup_{\partial(U_\delta \cap B_R(0))} u_\delta \leq \sup_{\partial U_\delta} u_\delta.$$

Für  $R \rightarrow \infty$  erhalten wir

$$\sup_{U_\varrho} u_\delta \leq \sup_{\partial U_\varrho} u_\delta \leq \sup_{\partial U \cup (\partial B_\varrho(0) \cap U)} u - \delta \log \varrho$$

und für  $\delta \rightarrow 0$ , dass

$$\sup_{U_\varrho} u \leq \sup_{\partial U \cup (\partial B_\varrho(0) \cap U)} u.$$

Für  $\varrho \rightarrow 0$  und o.B.d.A.  $0 \in \partial U \neq \emptyset$  folgt  $\sup_U u \leq \sup_{\partial U} u$ , und  $\mathbb{C}$  erfüllt das globale Maximumprinzip.

6. Für unbeschränkte harmonische Funktionen gilt das globale Maximumprinzip auch nicht auf  $\mathbb{C}$ , wie  $u(z) := \operatorname{Re}(e^z)$  für  $z \in \mathbb{C}$  und  $U = [Re > 0]$  zeigt.
7. Für  $\psi \in C_{loc}^\infty(\mathbb{R})$  monoton nicht-fallend und konvex und  $u$  in einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  rechnen wir

$$\Delta(\psi \circ u) = \psi'(u)\Delta u + \psi''(u)|\nabla u|^2 \geq 0.$$

Damit ist für jede subharmonische Funktion  $u$  auf einer Riemannschen Fläche auch  $\psi \circ u$  subharmonisch.

8. Setzen wir  $\psi(0) := 0, \psi'(0) := 0, \psi''(t) = e^{-1/t}$  für  $t > 0$  und  $\psi''(t) := 0$  für  $t \leq 0$ , so ist  $\psi \in C_{loc}^\infty(\mathbb{R})$  monoton nicht-fallend, konvex und

$$\psi(s) = 0 < \psi(t) \quad \text{für } s \leq 0 < t.$$

□

In [FaKr] IV.3.2 werden Riemannsche Flächen als hyperbolisch bezeichnet, wenn es eine nach oben beschränkte, nicht-konstante, subharmonische Funktion auf der Riemannschen Fläche gibt. Nach der folgenden Proposition ist dies äquivalent zur Negation des globalen Maximumprinzip.

**Proposition 8.1** *Eine Riemannsche Fläche erfüllt das globale Maximumprinzip genau dann, wenn alle nach oben beschränkten, subharmonischen Funktionen auf  $M$  konstant sind.*

**Beweis:**

( $\Rightarrow$ ): Erfüllt  $M$  das globale Maximumprinzip und ist  $u$  eine nach oben beschränkte, subharmonische Funktionen auf  $M$ , so sehen wir mit (8.1) auf der offenen Menge  $U := M - \{q\}, q \in M$ , dass  $u(p) \leq u(q) \quad \forall p \in M$ , und mit Symmetrie ist  $u$  konstant.

//

( $\Leftarrow$ ): Angenommen das globale Maximumprinzip gilt nicht auf  $M$ , so existiert mit (8.1) ein offenes  $U \subseteq M, \neq M$ ,  $u$  stetig und nach oben beschränkt auf  $\overline{U}$  und subharmonisch in  $U$  und  $p \in U$  mit nach Subtraktion einer Konstanten

$$u(p) > 0 > u(q) \quad \forall q \in \partial U.$$

Mit  $\psi$  aus der 8. Bemerkung nach Definition 8.1 setzen wir

$$v(q) := \begin{cases} (\psi \circ u)(q) & \text{für } q \in U, \\ 0 & \text{für } q \in M - U, \end{cases}$$

und  $v$  ist mit der 7. Bemerkung nach Definition 8.1 subharmonisch in  $U$ . Weiter ist  $v \equiv 0$  auf der offenen Menge  $[u < 0] \cup (M - \overline{U}) \supseteq M - U$ , also ist  $v$  glatt und subharmonisch auf ganz  $M$ . Da  $u$  auf  $U$  nach oben beschränkt ist und  $\psi$  stetig ist, ist  $v$  beschränkt auf  $U$ , also, da  $v \equiv 0$  auf  $M - U$ , ist  $v$  beschränkt auf ganz  $M$ .

Da  $U \neq M, \emptyset$ , da  $p \in U$ , offen und  $M$  zusammenhängend ist, ist  $\partial U \neq \emptyset$ , also existiert ein  $q \in \partial U$ , und es gilt  $v(q) = 0$ . Andererseits gilt  $v(p) = \psi(u(p)) > 0$ , und  $v$  ist nicht konstant, und die Proposition ist bewiesen.

///

In der nächsten Proposition suchen wir nicht-triviale Lösungen des Dirichlet-Problems. Da das globale Maximumprinzip die Eindeutigkeit des Dirichlet-Problems impliziert, können solche Lösungen nur auf Riemannschen Flächen ohne globales Maximumprinzip existieren.

**Proposition 8.2 (Dirichlet-Problem)**  *$M$  sei eine Riemannsche Fläche ohne globales Maximumprinzip und  $U \subseteq M$  offen, zusammenhängend mit glattem Rand  $\partial U \in C^\infty$  und  $M - U \neq \emptyset$  kompakt. Dann existiert eine glatte, nicht-triviale Lösung  $u \in C_{loc}^\infty(\overline{U})$  des Dirichlet-Problems*

$$\begin{aligned} u &\text{ ist harmonisch in } U, \\ u &= 1 \quad \text{auf } \partial U, \\ 0 &< u < 1 \quad \text{in } U. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Weiter kann  $u$  minimal gewählt werden, d.h. für jede Lösung  $\tilde{u} \in C_{loc}^\infty(\overline{U})$  mit

$$\begin{aligned} \tilde{u} &\text{ ist superharmonisch in } U, \\ \tilde{u} &\geq 1 \quad \text{auf } \partial U, \\ \tilde{u} &\geq 0 \quad \text{in } U. \end{aligned} \tag{8.4}$$

gilt

$$\tilde{u} \geq u \quad \text{auf } \overline{U}. \tag{8.5}$$

Wir nennen dieses  $u$  die minimale Lösung des Dirichlet-Problems (8.3).

**Beweis:**

Es genügt  $U \neq \emptyset$  zu betrachten. Nach Voraussetzung existiert mit Proposition 8.1 eine nach oben beschränkte, nicht-konstante, glatte subharmonische Funktion  $u_0$  auf  $M$ . Da  $K := M - U \neq \emptyset$  kompakt ist, können wir nach Subtraktion einer Konstanten  $\max_K u_0 = 0$  annehmen. Mit  $\psi$  aus der 8. Bemerkung nach Definition 8.1 ist  $\psi \circ u_0 \equiv 0$  auf  $K$  und  $\psi \circ u_0 \geq 0$  auf  $M$ . Mit der 7. Bemerkung nach Definition 8.1 ist  $\psi \circ u_0$  weiter subharmonisch in  $M$ .

Angenommen  $\psi \circ u_0$  ist konstant auf  $M$ , so ist  $\psi \circ u_0 \equiv 0$ , da  $K \neq \emptyset$ , also  $u_0 \leq 0$  auf  $M$ . Andererseits wird das Maximum  $\max_K u_0$  auf der kompakten Menge  $K$  in einem  $p \in K$  angenommen. Daher nimmt  $u_0 \leq 0 = u_0(p)$  sein globales Maximum in  $p \in K \subseteq M$  an, und daher ist  $u_0$  mit dem Maximumprinzip für offene, zusammenhängende Mengen nach der 2. Bemerkung nach Definition 8.1 konstant auf  $M$  im Widerspruch zur Voraussetzung.

Daher ist  $\psi \circ u_0 \not\equiv 0$ , und es existiert ein  $q_0 \in M - K = U$  mit  $(\psi \circ u_0)(q_0) > 0$ . Da  $u_0$  auf  $U$  nach oben beschränkt ist und  $\psi$  stetig ist, ist  $\psi \circ u_0$  nach oben beschränkt, also ganz beschränkt auf  $M$ . Für  $R > \sup_M(\psi \circ u_0)$  ist  $v_0 := 1 - (\psi \circ u_0)/R$  eine glatte superharmonische Funktion auf  $M$  mit

$$\begin{aligned} v_0 &= 1 \quad \text{auf } K = M - U \supseteq \partial U, \\ 0 < v_0 &\leq 1 \quad \text{in } M - K = U, \\ v_0(q_0) &< 1 \quad \text{für ein } q_0 \in U. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Da  $K = M - U$  kompakt ist, existiert wie am Beginn des Beweises zu Proposition 7.5 ein  $\phi \in C_0^\infty(M)$  mit  $\phi \equiv 1$  auf einer offenen Obermenge  $V \supseteq K$ . Nun wählen wir mit Proposition 7.5 und mit dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom, das  $M$  erfüllt, sukzessive offene Menge  $\text{supp } \phi \subseteq \Omega_n$  mit kompaktem Abschluss  $\overline{\Omega_n} \subseteq \Omega_{n+1}$ , glattem Rand  $\partial\Omega_n$  und mit  $M = \bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n$ . Klarerweise hat die offene Menge  $\Omega_n \cap U \subseteq \Omega_n$  auch kompaktem Abschluss in  $M$ , und mit  $\Omega_n \cap U \subseteq U = M - K$  sehen wir  $\Omega_n \cap U \neq M$ , da  $K \neq \emptyset$ . Da  $K \subseteq V \subseteq [\phi = 1] \subseteq \text{supp } \phi \subseteq \Omega_n$  und  $V$  offen ist, hat  $\Omega_n \cap U$  glatten Rand  $\partial(\Omega_n \cap U) = \partial\Omega_n + \partial U$ . Daher existieren mit Proposition 7.4 glatte Lösungen  $\tilde{u}_n \in C^\infty(\overline{\Omega_n \cap U})$  des Poisson-Problems

$$\begin{aligned} \Delta_g \tilde{u}_n &= -\Delta_g \phi \quad \text{in } \Omega_n \cap U, \\ \tilde{u}_n &= 0 \quad \text{auf } \partial(\Omega_n \cap U) = \partial\Omega_n + \partial U. \end{aligned}$$

Mit unserer Wahl von  $\phi$  folgt für  $u_n := \tilde{u}_n + \phi \in C^\infty(\overline{\Omega_n \cap U})$ , dass

$$\begin{aligned} \Delta_g u_n &= 0 \quad \text{in } \Omega_n \cap U, \\ u_n &= 1 \quad \text{auf } \partial U, \\ u_n &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_n. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Dann sind  $u_n - v_0, -u_n \in C^\infty(\overline{\Omega_n \cap U})$  subharmonisch in  $\Omega_n \cap U$  und  $u_n - v_0, -u_n \leq 0$  auf  $\partial(\Omega_n \cap U)$  mit (8.6). Da  $\Omega_n \cap U$  kompakten Abschluss in  $M$  hat, folgt mit dem Maximumprinzip (8.2), dass

$$0 \leq u_n \leq v_0 \leq 1 \quad \text{auf } \overline{\Omega_n \cap U}. \tag{8.8}$$

Da  $u_n$  in  $\Omega_n \cap U$  harmonisch ist und  $M = \bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n$ , folgt mit den Cauchy-Abschätzungen für harmonische Funktionen, siehe [GT] Theorem 2.10 bzw. [Sch-c] Satz 2.5, und dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom, das  $M$  erfüllt, dass nach Übergang zu einer Teilfolge  $u_n \rightarrow u$  glatt auf kompakten Teilmengen von  $U$  und  $u$  harmonisch in  $U$ , insbesondere  $u \in C_{loc}^\infty(U)$ .

Da  $0 \leq u_n \leq 1$  harmonisch in  $V \cap U \subseteq \Omega_n \cap U$  ist,  $u_n = 1$  auf  $\partial U \in C^\infty$  und  $\partial U \subseteq K \subseteq V$ , erhalten wir mit Standardtheorie für elliptische Gleichungen, siehe [GT] Theorem 6.19 bzw. [Sch-c] Satz 7.5, für jedes  $q \in \partial U$  eine offene Umgebung  $U(q) \subseteq V$  von  $q$  mit

$$\|u_n\|_{C^{m,1/2}(U(q) \cap U)} \leq C_{M,U,q,m}.$$

Damit und mit dem obigen inneren Argument konvergiert nach Übergang zu einer Teilfolge  $u_n \rightarrow u$  glatt auf kompakten Teilmengen von  $\overline{U}$  mit  $u$  harmonisch in  $U$ ,  $u = 1$  auf  $\partial U$ , insbesondere  $u \in C_{loc}^\infty(\overline{U})$ .

Zur Verifikation der dritten Aussage in (8.3), also insbesondere die Nicht-Trivialität  $u \not\equiv 1$ , beachten wir  $0 \leq u \leq v_0 \leq 1$  in  $U$  mit (8.8), und mit (8.6) folgt  $u(q_0) \leq v_0(q_0) < 1$  und  $q_0 \in U$ , insbesondere  $u \not\equiv 1$ . Wäre nun  $u(q) = 1$  für ein  $q \in U$ , so folgt mit der 2. Bemerkung nach Definition 8.1, da  $U$  zusammenhängend ist, dass  $u \equiv 1$ , was wir gerade ausgeschlossen haben. Dies ergibt  $u < 1$  in  $U$ .

Nun ist  $\partial U \neq \emptyset$ , da das offene  $U \neq M, \emptyset$ , da  $K = M - U \neq \emptyset$ , und  $M$  zusammenhängend ist, also  $u \not\equiv 0$ , da  $u \equiv 1$  auf  $\partial U \neq \emptyset$ . Da  $u \geq 0$ , folgt genau wie eben mit der 2. Bemerkung nach Definition 8.1, da  $U$  zusammenhängend ist, dass  $u > 0$  in  $U$ . Zusammen ist  $u$  eine gewünschte Lösung des Dirichlet-Problems (8.3).

Tatsächlich ist  $u$  auch die minimale Lösung, denn für  $\tilde{u} \in C_{loc}^\infty(\overline{U})$  mit (8.4) ist  $\tilde{u} - u_n$  superharmonisch in  $\Omega_n \cap U$  und  $\tilde{u} \geq u_n$  auf  $\partial(\Omega_n \cap U) = \partial\Omega_n + \partial U$  mit (8.7), also folgt mit dem Maximumprinzip (8.2), dass  $\tilde{u} \geq u_n$  in  $\Omega_n \cap U$ , also  $\tilde{u} \geq u$  in  $U$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $\tilde{u} \geq u$  in  $\overline{U}$  mit Stetigkeit, d.h. (8.5). Daher ist  $u$  die minimale Lösung, und die Proposition ist bewiesen.

///

Ohne das Verschwinden des Integral  $\int_M \varphi \, d\mu_g$  in Lemma 7.1 ist nicht klar, ob das Poisson-Problem eine beschränkte Lösung hat. Tatsächlich ist dies mit der folgenden Proposition äquivalent zur Negation des globalen Maximumprinzips.

**Proposition 8.3** *Eine Riemannsche Fläche erfüllt das globale Maximumprinzip  $M$  genau dann, wenn für jede hermitesche Metrik  $g$  auf  $M$  und jedes  $\varphi \in C_0^\infty(M)$  ohne die Annahme  $\int_M \varphi \, d\mu_g = 0$  wie in Lemma 7.1 eine beschränkte, glatte Lösung  $u \in C_{loc}^\infty(M) \cap L^\infty(M)$  des Poisson-Problems*

$$\Delta_g u = \varphi \quad \text{in } M$$

*existiert.*

**Beweis:**

( $\Rightarrow$ ): Wir betrachten eine Karte  $z : V \subseteq \overline{M} \xrightarrow{\sim} B_5(0) \subseteq \mathbb{C}$  und identifizieren  $V \cong B_4(0) \subseteq M$ . Dann ist die Menge  $U := M - \overline{B_1(0)}$  offen, zusammenhängend mit glattem Rand und  $M - U = \overline{B_1(0)} \neq \emptyset$  ist kompakt. Mit Proposition 8.2 existiert eine glatte, nicht-triviale Lösung  $u \in C_{loc}^\infty(\overline{U})$  des Dirichlet-Problems (8.3). Nun wählen wir ein  $\xi \in C_0^\infty(B_3(0))$  mit  $\xi \equiv 1$  auf  $B_2(0)$  und setzen  $\phi_0 := (1 - \xi)u \in C_{loc}^\infty(M) \cap L^\infty(M)$ , d.h.  $\phi_0 \equiv 0$  in  $B_2(0)$  und  $\phi_0 \equiv u$  in  $M - B_3(0) \supseteq B_5(0) - B_3(0)$ . Da  $u$  harmonisch in  $U = M - \overline{B_1(0)}$  ist, sehen wir

$$\Delta_g \phi_0 = 0 \quad \text{in } (M - \overline{B_3(0)}) \cup B_2(0),$$

also ist  $\varphi_0 := \Delta_g \phi_0 \in C_0^\infty(B_4(0)) \subseteq C_0^\infty(M)$ . Mit dem Divergenzsatz rechnen wir

$$\begin{aligned} \int_M \varphi_0 \, d\mu_g &= \int_M \Delta_g \phi_0 \, d\mu_g = \int_{B_4(0)} \Delta \phi_0 \, d\mathcal{L}^2 = \int_{\partial B_4(0)} \partial_{\nu_{B_4(0)}} \phi_0 \, d\text{area}_{\partial B_4(0)} = \\ &= \int_{\partial B_4(0)} \partial_{\nu_{B_4(0)}} u \, d\text{area}_{\partial B_4(0)} = - \int_{\partial B_1(0)} \partial_{\nu_{B_1(0)}} u \, d\text{area}_{\partial B_1(0)}, \end{aligned} \quad (8.9)$$

da  $\Delta u = 0$  in  $B_4(0) - \overline{B_1(0)}$ .

Angenommen das Integral in (8.9) verschwindet, so setzen  $u$  mit  $u := 1$  auf  $B_1(0) \subseteq$  fort und sehen  $u \in C_{loc}^{1,1}(M) \cap C_{loc}^\infty(M - \partial B_1(0))$  mit  $\Delta u = 0$  in  $B_1(0)$ . Dann ergibt sich für  $\eta \in C_0^\infty(B_1(0))$  mit dem Divergenzsatz

$$\int_{B_1(0)} u \cdot \Delta \eta \, d\mathcal{L}^2 = 0,$$

und mit dem Lemma von Weyl, siehe [GT] Exercise 2.8 bzw. [Sch-c] Lemma 2.1, ist  $u$  harmonisch in  $B_1(0)$ , also ist  $u$  harmonisch auf ganz  $M$ , insbesondere  $u \in C_{loc}^\infty(M)$ . Da  $u \leq 1$  auf  $M$  mit (8.3) und  $u \equiv 1$  in  $B_1(0)$ , nimmt  $u$  auf  $B_1(0)$  sein globales Maximum an, und daher ist  $u$  mit dem Maximumprinzip in der 2. Bemerkung nach Definition 8.1 konstant  $\equiv 1$  auf  $M$ . Dies widerspricht  $u < 1$  in  $U \neq \emptyset$  mit (8.3), und daher verschwindet das Integral in (8.9) nicht.

Damit existiert zu jedem  $\varphi \in C_0^\infty(M)$  ohne die Annahme  $\int_M \varphi \, d\mu_g = 0$  wie in Lemma 7.1 ein  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit  $\int_M (\varphi - \alpha \varphi_0) \, d\mu_g = 0$ . Da weiter  $\varphi - \alpha \varphi_0 \in C_0^\infty(M)$  existiert mit Lemma 7.1 eine beschränkte, glatte Lösung  $\bar{u} \in C_{loc}^\infty(M) \cap L^\infty(M)$  des Poisson-Problems

$$\Delta_g \bar{u} = \varphi - \alpha \varphi_0 \quad \text{in } M.$$

Dann ist  $u := \bar{u} + \alpha \phi_0 \in C_{loc}^\infty(M) \cap L^\infty(M)$  eine beschränkte, glatte Lösung des Poisson-Problems

$$\Delta_g u = \Delta_g \bar{u} + \alpha \Delta_g \phi_0 = \varphi \quad \text{in } M,$$

wie gewünscht.

//

( $\Leftarrow$ ): Wir wählen  $\varphi \in C_0^\infty(M)$  mit  $\varphi \geq 0, \neq 0$ , und nach Voraussetzung existiert eine beschränkte, glatte Lösung  $u \in C_{loc}^\infty(M) \cap L^\infty(M)$  des Poisson-Problems

$$\Delta_g u = \varphi \geq 0 \quad \text{in } M,$$

insbesondere ist  $u$  subharmonisch auf  $M$ . Da  $\varphi \neq 0$ , ist  $u$  nicht-konstant, und  $M$  erfüllt mit Proposition 8.1 nicht das globale Maximumprinzip.

///

**Proposition 8.4 (Existenz einer Greenschen Funktion)**  *$M$  sei eine Riemannsche Fläche ohne globales Maximumprinzip. Dann existiert zu jedem  $p \in M$  eine Greensche*

Funktion  $\Gamma_p \in C_{loc}^\infty(M - \{p\})$  in  $p$ , d.h. für eine Karte  $z : U(p) \subseteq M \xrightarrow{\sim} B_2(0) \subseteq \mathbb{C}$  mit  $p \in U(p)$ ,  $z(p) = 0$  und der Identifikation  $U(p) \cong B_2(0) \subseteq M$  gilt

$$\begin{aligned} \Gamma_p &\text{ ist harmonisch in } M - \{p\}, \\ \Gamma_p &> 0 \quad \text{in } M - \{p\}, \\ \Gamma_p(z) + \log |z| &\text{ ist beschränkt für } z \in B_{1/2}(0) - \{0\}. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Weiter kann  $\Gamma_p$  minimal gewählt werden, d.h. für jedes  $\Gamma \in C_{loc}^\infty(M - \{p\})$  mit

$$\begin{aligned} \Gamma &\text{ ist superharmonisch in } M - \{p\}, \\ \Gamma &\geq 0 \quad \text{in } M - \{p\}, \\ \Gamma(z) + \log |z| &\text{ ist nach unten beschränkt für } z \in B_{1/2}(0) - \{0\}, \end{aligned} \tag{8.11}$$

gilt

$$\Gamma \geq \Gamma_p \quad \text{in } M - \{p\}. \tag{8.12}$$

**Beweis:**

Wir konstruieren  $\Gamma_p$  von unten und mit einer Schranke von oben. Für  $0 < \varrho < 1$  ist  $U_\varrho := M - \overline{B_\varrho(0)}$  offen, zusammenhängend mit glatten Rand und  $M - U_\varrho = \overline{B_\varrho(0)} \neq \emptyset$  ist kompakt. Da  $M$  ohne globales Maximumprinzip ist, existiert mit Proposition 8.2 eine glatte, nicht-triviale Lösung  $u_\varrho \in C_{loc}^\infty(M - B_\varrho(0))$  des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} u_\varrho &\text{ ist harmonisch in } U_\varrho = M - \overline{B_\varrho(0)}, \\ u_\varrho &= -\log \varrho \quad \text{auf } \partial B_\varrho, \\ 0 < u_\varrho &< -\log \varrho \quad \text{in } U_\varrho = M - \overline{B_\varrho(0)}. \end{aligned} \tag{8.13}$$

Weiter wählen wir  $\tilde{u}$  minimal, d.h. für  $\tilde{u} \in C_{loc}^\infty(\overline{U})$  mit

$$\begin{aligned} \tilde{u} &\text{ ist superharmonisch in } U_\varrho = M - \overline{B_\varrho(0)}, \\ \tilde{u} &\geq -\log \varrho \quad \text{auf } \partial B_\varrho, \\ \tilde{u} &\geq 0 \quad \text{in } U_\varrho = M - \overline{B_\varrho(0)}. \end{aligned} \tag{8.14}$$

gilt

$$\tilde{u} \geq u_\varrho \quad \text{auf } M - B_\varrho(0). \tag{8.15}$$

Da  $\log |\cdot|$  harmonisch in  $B_1(0) - \{0\}$  ist und  $u \geq -\log |\cdot|$  auf  $\partial(B_1(0) - \overline{B_\varrho(0)})$  ist, folgt mit dem Maximumprinzip (8.2), dass

$$u_\varrho(z) + \log |z| \geq 0 \quad \text{für } \varrho \leq |z| \leq 1. \tag{8.16}$$

Daher erfüllt  $u_r$  die Bedingungen (8.14) für  $0 < r < \varrho < 1$  und mit (8.15) erhalten wir

$$u_r \geq u_\varrho \quad \text{auf } M - B_\varrho(0) \text{ für } 0 < r < \varrho < 1. \tag{8.17}$$

Andererseits wählen wir eine hermitesche Metrik  $g$  auf  $M$  und ein  $\eta \in C_0^\infty(B_1(0))$  mit  $\eta \equiv 1$  auf  $B_{1/2}(0)$  und setzen  $\phi := \eta \cdot \log |\cdot| \in C_{loc}^\infty(M - \{p\})$ . Da  $\log |\cdot|$  harmonisch in  $B_1(0) - \{0\}$  ist, hat  $\Delta_g \phi$  kompakten Träger in  $B_1(0) - \{0\}$ , und wir betrachten  $\Delta_g \phi_\varrho \in C_0^\infty(B_1(0) - \{0\}) \subseteq C_0^\infty(M)$ . Da  $M$  ohne globales Maximumprinzip ist, existiert mit Proposition 8.2 eine beschränkte, glatte Lösung  $\tilde{v} \in C_{loc}^\infty(M) \cap L^\infty(M)$  des Poisson-Problems

$$\Delta_g \tilde{v} = \Delta_g \phi \quad \text{in } M.$$

Damit ist  $v := \tilde{v} - \phi \in C_{loc}^\infty(M - \{p\})$  harmonisch in  $M - \{p\}$  und

$$v(q) = \tilde{v}(q) \text{ ist beschränkt für } q \in M - \text{supp } \eta \supseteq M - B_1(0),$$

$$v(z) + \log |z| = \tilde{v}(z) \text{ ist beschränkt für } z \in B_{1/2}(0) - \{0\},$$

da  $\text{supp } \eta \subseteq B_1(0)$  und  $\eta \equiv 1$  in  $B_{1/2}(0)$ . Durch Addition einer Konstanten erreichen wir

$$\begin{aligned} v &\geq 0 \quad \text{auf } M - B_{1/2}(0), \\ v(z) + \log |z| &\geq 0 \quad \text{für } z \in B_{1/2}(0) - \{0\}, \\ \sup_{z \in B_{1/2}(0) - \{0\}} (v(z) + \log |z|) &< \infty, \end{aligned}$$

also  $v(z) \geq -\log |z| \geq 0$  für  $z \in B_{1/2}(0) - \{0\}$ , und somit

$$\begin{aligned} v &\text{ ist harmonisch in } M - \{p\}, \\ v &\geq 0 \quad \text{in } M - \{p\}, \\ v(z) + \log |z| &\geq 0 \quad \text{für } z \in B_{1/2}(0) - \{0\}, \\ \sup_{z \in B_{1/2}(0) - \{0\}} (v(z) + \log |z|) &< \infty. \end{aligned} \tag{8.18}$$

Damit erfüllt  $v$  die Bedingungen (8.14) für  $0 < \varrho < 1/2$  und mit (8.15) erhalten wir

$$v \geq u_\varrho \quad \text{auf } M - B_\varrho(0) \text{ für } 0 < \varrho < 1/2. \tag{8.19}$$

Da auch  $u_\varrho > 0$  mit (8.13), sind die harmonischen Funktionen  $u_\varrho$  lokal beschränkt in  $M - \{p\}$ , und mit den Cauchy-Abschätzungen für harmonische Funktionen, siehe [GT] Theorem 2.10 bzw. [Sch-c] Satz 2.5, und dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom, das  $M$  erfüllt, konvergiert (8.17) ohne Übergang zu einer Teilfolge  $u_{\varrho_j} \nearrow \Gamma_p$  glatt auf kompakten Teilmengen von  $M - \{p\}$  für  $\varrho_j \searrow 0$  und  $\Gamma_p$  ist harmonisch in  $M - \{p\}$ , insbesondere  $u \in C_{loc}^\infty(M - \{p\})$ . Mit (8.13) und (8.19) haben wir  $0 < \Gamma_p \leq v$  in  $M - \{p\}$ , und mit (8.16) und (8.19) ist

$$0 \leq \Gamma_p(z) + \log |z| \leq v(z) + \log |z| \text{ beschränkt für } z \in B_{1/2}(0) - \{0\}.$$

Zusammen erfüllt  $\Gamma_p$  die Bedingungen in (8.10).

Tatsächlich ist  $\Gamma_p$  auch die minimale Lösung, denn für  $\Gamma \in C_{loc}^\infty(M - \{p\})$  mit (8.11) sehen wir für  $\tau > 1$ , dass

$$\lim_{z \rightarrow 0} (\tau \Gamma(z) + \log |z|) \geq \lim_{z \rightarrow 0} (1 - \tau) \log |z| - \tau C = \infty.$$

Dies ergibt  $\tau\Gamma \geq u_\varrho$  auf  $\partial B_\varrho$  für  $\varrho > 0$  klein abhängig von  $\tau > 1$  und, da  $\Gamma \geq 0$  superharmonisch in  $M - \{p\}$  mit (8.11) ist, folgt mit (8.15), dass  $\tau\Gamma \geq u_\varrho$  in  $M - \overline{B_\varrho(0)}$ , also  $\Gamma \geq \Gamma_p$  in  $M - \{p\}$  für  $\varrho \rightarrow 0, \tau \searrow 1$ . Dies ist (8.12), und die Proposition ist bewiesen.

///

**Bemerkung:**

Die Minimalität gilt sogar in einer grösseren Klasse. Wir behaupten für jedes  $A \subseteq M$  ohne Häufungspunkte in  $M$  und jedes  $\Gamma \in C_{loc}^\infty(M - A)$  mit

$\Gamma$  ist superharmonisch in  $M - A$ ,

$$\Gamma \geq 0 \quad \text{in } M - A,$$

$$\lim_{q \rightarrow q_0} \Gamma(q) = \infty \quad \forall q_0 \in A,$$

(8.20)

$\Gamma(z) + \log|z|$  ist nach unten beschränkt für  $z \in B_{1/2}(0) - \{0\}$ ,

gilt

$$\Gamma \geq \Gamma_p \quad \text{in } M - A. \quad (8.21)$$

**Proposition 8.5 (Monodromie-Satz)** *Es sei  $M$  eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche,  $u$  sei harmonisch auf  $M - A$  und  $A \subseteq M$  habe keine Häufungspunkte in  $M$ . Weiter sei eine der Bedingungen erfüllt.*

1. *Zu jedem  $p \in A$  existiert eine offene Umgebung  $U(p)$  von  $p$  und eine meromorphe Funktion  $f_p$  auf  $U(p)$  mit*

$$\operatorname{Re}(f_p) = u \quad \text{auf } U(p) - \{p\} \quad (8.22)$$

2. *Zu jedem  $p \in A$  existiert eine offene Umgebung  $U(p)$  von  $p$  und eine meromorphe Funktion  $f_p$  auf  $U(p)$  mit*

$$\log|f_p| = u \quad \text{auf } U(p) - \{p\}. \quad (8.23)$$

Dann existiert eine meromorphe Funktion  $f$  auf  $M$  mit

$$\operatorname{Re}(f) = u \quad \text{auf } M - A$$

bzw.

$$\log|f| = u \quad \text{auf } M - A$$

abhängig davon, ob (8.22) oder (8.23) erfüllt ist.

**Beweis:**

Wir betrachten aus der 5. Bemerkung nach Definition 2.2 die Menge der meromorphen Keime  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{S^2}$  auf  $M$  mit der Projektion  $\pi : \mathcal{M} \rightarrow M$  und der Evaluation  $\omega : \mathcal{M} \rightarrow S^2$ . Dabei betrachten wir die offene Untermenge  $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$  der Vereinigung aller offenen Mengen  $\langle f, U \rangle$  mit

$$\operatorname{Re}(f) = u \quad \text{bzw.} \quad \log|f| = u \quad \text{auf } U - A. \quad (8.24)$$

Wir zeigen,  $\pi : \mathcal{M}_0 \rightarrow M$  ist eine Überlagerungsprojektion. Dazu betrachten wir für jedes  $p \in A$  eine offene Umgebung  $U(p)$  von  $p$  und eine meromorphe Funktion  $f_p$  auf  $U(p)$  mit (8.22) bzw. (8.23) und  $U(p) \cap A = \{p\}$ , und für  $p \in M - A$  und  $U(p) \subseteq M - A$ ,  $U(p) \cong B_1(0)$  existiert solches  $f_p$  mit elementarer Funktionentheorie. Für einen Keim  $(g, V)_q \in \mathcal{M}_0$  mit  $q = \pi((g, V)_q) \in U(p)$  existiert mit der Definition von  $\mathcal{M}_0$  eine offene Menge  $(g, V)_q \in \langle f, U \rangle \subseteq \mathcal{M}_0$  mit (8.24). Also gilt  $(g, V)_q = (f, U)_q$  und nach Verkleinern können wir  $f = g$  auf  $U = V \ni q, \subseteq U(p)$  und  $U = V$  als zusammenhängend annehmen. Mit (8.22) bzw. (8.23) und (8.24) sehen wir

$$Re(f) = u = Re(f_p) \quad \text{bzw.} \quad \log |f| = u = \log |f_p| \quad \text{auf } U - \{p\}.$$

Da  $U$  zusammenhängend ist, ist auch  $U - \{p\}$  zusammenhängend, und wir schliessen

$$f - f_p \equiv \alpha \in i\mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad f/f_p \equiv \alpha \in \partial B_1(0) \subseteq \mathbb{C} \quad \text{auf } U - \{p\}$$

und mit Stetigkeit auf ganz  $U$ . Dies ergibt

$$(g, V)_q = (f, U)_q \in \langle f_p + \alpha, U(p) \rangle \quad \text{bzw.} \quad (g, V)_q = (f, U)_q \in \langle \alpha f_p, U(p) \rangle,$$

also

$$\pi^{-1}(U(p)) = \cup_{\alpha \in i\mathbb{R}} \langle f_p + \alpha, U(p) \rangle \quad \text{bzw.} \quad \pi^{-1}(U(p)) = \cup_{\alpha \in \partial B_1(0)} \langle \alpha f_p, U(p) \rangle.$$

Weiter sind  $\langle f_p + \alpha, U(p) \rangle$  bzw.  $\langle \alpha f_p, U(p) \rangle$  paarweise disjunkt, und  $\pi|_{\langle f_p + \alpha, U(p) \rangle} \xrightarrow{\sim} U(p)$  bzw.  $\pi|_{\langle \alpha f_p, U(p) \rangle} \xrightarrow{\sim} U(p)$  sind lokale Homöomorphismen. Zusammen ist  $\pi : \mathcal{M}_0 \rightarrow M$  eine Überlagerungsprojektion.

Nun betrachten wir für ein beliebiges  $p \in M$  eine offene Umgebung  $U(p)$  von  $p$  und eine meromorphe Funktion  $f_p$  auf  $U(p)$  mit (8.22) bzw. (8.23), die wie oben bemerkt auch für jedes  $p \in M - A \neq \emptyset$  existiert, und den Keim  $(f_p, U(p))_p \in \mathcal{M}_0$ . Da  $M$  einfach zusammenhängend und lokal zusammenhängend ist, existiert mit Proposition B.3 ein Lift  $\hat{f} : M \rightarrow \mathcal{M}_0$  von  $id_M$ , d.h.  $\pi \circ \hat{f} = id_M$ , mit  $\hat{f}(p) = (f_p, U(p))_p \in \mathcal{M}_0$ .

Mit der 5. Bemerkung nach Definition 2.2 ist die Zusammenhangskomponente  $\mathcal{M}_1$  von  $\mathcal{M}_0$ , die die zusammenhängende Menge  $\hat{f}(M) \subseteq \mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$  enthält, eine Riemannsche Fläche, und die Projektion  $\pi : \mathcal{M}_1 \rightarrow M$  ist holomorph. Mit der 3. Bemerkung nach Definition B.1 ist diese Einschränkung wieder eine Überlagerungsprojektion, und mit der Bemerkung nach Proposition B.5 ist der Lift  $\hat{f} : M \rightarrow \mathcal{M}_1$  holomorph. Damit ist  $f := \omega \circ \hat{f} : M \rightarrow S^2$  holomorph bzw. eine meromorphe Funktion auf  $M$ . Da  $\hat{f}(M) \subseteq \mathcal{M}_0$ , existiert zu jedem  $q \in M$  eine offene Menge  $\langle g, U \rangle$  mit (8.24) und mit  $\hat{f}(q) \in \langle g, U \rangle$ . Da  $(\pi \circ \hat{f})(q) = q$ , folgt  $\hat{f}(q) = (g, U)_q$ , also

$$f(q) = (\omega \circ \hat{f})(q) = \omega((g, U)_q) = g(q)$$

und mit (8.24) für  $q \in M - A$ , dass

$$Re(f)(q) = Re(g)(q) = u(q) \quad \text{bzw.} \quad \log |f(q)| = \log |g(q)| = u(q),$$

und  $f$  ist eine gewünschte meromorphe Funktion auf ganz  $M$ .

///

## 9 Einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen

In diesem Paragraphen bestimmen wir bis auf Biholomorphie alle einfach zusammenhängenden Riemannsche Flächen.

**Satz 9.1 (Uniformisierungssatz für Riemannsche Flächen)**  $S^2, \mathbb{C}$  und  $D$  sind bis auf Biholomorphie alle einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen.

□

Wir unterscheiden den Fall mit und ohne globales Maximumprinzip.

**Lemma 9.1** *Jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche ohne globales Maximumprinzip ist biholomorph zu  $D$ .*

**Beweis:**

Es sei  $M$  eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche ohne globales Maximumprinzip. Mit Proposition 8.4 existiert zu jedem  $p \in M$  eine Greensche Funktion  $\Gamma_p$  mit (8.10) und (8.12). Da  $\Gamma_p + \log |\cdot|$  in einer Karte  $z : U(p) \xrightarrow{\sim} B_2(0) \subseteq \mathbb{C}, p \in U(p), z(p) = 0$ , harmonisch und beschränkt in  $B_1(0) - \{0\}$  ist, existiert eine holomorphe Funktion  $g$  in  $B_2(0) \cong U(p)$  mit  $\operatorname{Re}(g) = \Gamma_p + \log |\cdot|$  bzw.

$$\Gamma_p(z) = \log |e^{g(z)}/z| \quad \text{für } z \in B_2(0) - \{0\}. \quad (9.1)$$

Da  $M$  einfach zusammenhängend ist, existiert mit dem Monodromie-Satz, Satz 8.5, eine meromorphe Funktion  $f_p$  auf  $M$  mit  $\log |f_p| = -\Gamma_p$  in  $M - \{p\}$ . Zuerst sehen wir mit (8.10) für  $q \in M - \{p\}$ , dass  $\log |f_p(q)| = -\Gamma_p(q) < 0$ , also ist  $f_p$  beschränkt und erweitert somit holomorph in  $p$ , und  $f_p : M \rightarrow D$  ist holomorph. Mit (9.1) sehen wir

$$|\Gamma_p(p)| = \lim_{z \rightarrow 0} e^{-\Gamma_p(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} |e^{g(z)}/z| = 0,$$

da  $g$  holomorph in  $B_2(0)$  ist, und wir erhalten

$$f_p(p) = 0 \quad \text{und} \quad f_p(q) \neq 0 \quad \text{für } q \in M - \{p\}. \quad (9.2)$$

Für  $\alpha \in B_1(0)$  setzen wir  $\varphi_\alpha(z) := (z - \alpha)/(1 - \bar{\alpha}z)$  für  $z \in \overline{B_1(0)}$  und sehen,  $\varphi_\alpha : B_1(0) \xrightarrow{\sim} B_1(0)$  ist biholomorph. Daher ist  $f := \varphi_\alpha \circ f_p : M \rightarrow D$  holomorph,  $\Gamma := -\log |f| > 0$  ist harmonisch in  $M - f_p^{-1}(\alpha)$ , und  $A := f_p^{-1}(\alpha)$  hat keine Häufungspunkte in  $M$ , da  $f_p$  mit (9.2) nicht konstant ist. Für  $q_0 \in A = f_p^{-1}(\alpha)$  haben wir

$$\lim_{q \rightarrow q_0} \Gamma(q) = - \lim_{q \rightarrow q_0} \log |f(q)| = - \lim_{q \rightarrow q_0} \log |(\varphi_\alpha \circ f_p)(q)| = \infty.$$

Für  $q \in M - \{p\}$  ist  $\alpha := f_p(q) \in B_1(0) - \{0\}$  und  $f(q) = \varphi_\alpha(\alpha) = 0$ , und wir haben in einer Karte  $w : U(q) \xrightarrow{\sim} B_2(0) \subseteq \mathbb{C}, q \in U(q), w(q) = 0, A \cap U(q) = \{q\}$ , dass

$$\lim_{w \rightarrow 0} f(w)/w^n \in \mathbb{C} - \{0\}$$

für ein  $n \in \mathbb{N}$ , da  $f_p$  und somit  $f$  nicht konstant sind. Dies ergibt

$$\lim_{w \rightarrow 0} \left( \Gamma(w) + n \log |w| \right) = - \lim_{w \rightarrow 0} \log |f(w)/w^n| \in \mathbb{R}$$

und

$\Gamma(w) + \log |w| \geq \Gamma(w) + n \log |w|$  ist nach unten beschränkt für  $w \in B_{1/2}(0) - \{0\}$ .

Zusammen erfüllt  $\Gamma$  die Bedingungen (8.20) bei  $q \in M$ , und wir erhalten  $\Gamma \geq \Gamma_q$  in  $M - A$  mit (8.21) bzw.

$$|\varphi_\alpha \circ f_p| \leq |f_q| \text{ zuerst in } M - A, \quad (9.3)$$

dann in  $M$ , da  $A$  keine Häufungspunkte, also kein Inneres in  $M$  hat. Für  $p \in M - \{q\}$  sehen wir mit (9.2), dass

$$|f_p(q)| = |\alpha| = |\varphi_\alpha(0)| = |(\varphi_\alpha \circ f_p)(p)| \leq |f_q(p)| \quad (9.4)$$

und mit Symmetrie  $|f_p(q)| = |f_q(p)|$  für alle  $p, q \in M$ . Mit (9.3) haben wir  $h := (\varphi_\alpha \circ f_p)/f_q : M \rightarrow \overline{D} \subseteq \mathbb{C}$  ist holomorph. Weiter gilt Gleichheit in (9.4), also  $|(\varphi_\alpha \circ f_p)(p)| = |f_q(p)| \neq 0$  mit (9.2), und somit  $|h(p)| = 1$  und  $|h| \equiv 1$  auf  $M$ . Mit (9.2) ergibt dies

$$|\varphi_\alpha \circ f_p| = |f_q| \neq 0 \text{ in } M - \{q\},$$

also  $f_p \neq \alpha = f_p(q)$  in  $M - \{q\}$ , und  $f_p : M \rightarrow D$  ist injektiv. Damit ist  $M \cong V := f_p(M) \subseteq D$  offen und einfach zusammenhängend, und mit dem Riemannschen Abbildungssatz, siehe [Ru] Theorem 14.8 oder [Sch-b] Satz 3.2, ist  $V$  biholomorph zu  $D$ , also ist auch  $M$  biholomorph zu  $D$ , und das Lemma ist bewiesen.

///

**Lemma 9.2** *Jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche mit globalem Maximumprinzip ist biholomorph zu  $S^2$  oder  $\mathbb{C}$ .*

**Beweis:**

Es sei  $M$  eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche mit globalem Maximumprinzip. Für einen Punkt  $p_0 \in M$  wählen wir eine Karte  $z : U(p_0) \xrightarrow{\sim} B_2(0), p_0 \in U(p_0), z(p_0) = 0$ . Dann ist  $1/z$  holomorph in  $U(p_0) - \{0\}$ , und mit Proposition 7.6 existiert eine harmonische Funktion auf  $M - \{p_0\}$  mit

$$\lim_{q \rightarrow p_0} (u(q) - \operatorname{Re}(1/z)(q)) = 0, \quad (9.5)$$

$u$  ist beschränkt im Komplement jeder Umgebung von  $p_0$ .

Da  $u - \operatorname{Re}(1/z)$  harmonisch und beschränkt in  $B_1(0) - \{0\}$  ist, existiert eine holomorphe Funktion  $g$  in  $B_2(0) \cong U(p_0)$  mit  $\operatorname{Re}(g) = u - \operatorname{Re}(1/z)$  bzw.

$$u(z) = \operatorname{Re}(g(z) + (1/z)) \text{ für } z \in B_2(0) - \{0\}. \quad (9.6)$$

Da  $M$  einfach zusammenhängend ist, existiert mit dem Monodromie-Satz, Satz 8.5, eine meromorphe Funktion  $f_0$  auf  $M$  mit  $\operatorname{Re}(f_0) = u$  in  $M - \{p_0\}$ . Mit (9.6) sehen wir  $\operatorname{Re}(f_0 - g - (1/z)) \equiv 0$  in  $B_2(0) - \{0\}$ , also  $f_0 \equiv (1/z) + g + \alpha i, \alpha \in \mathbb{R}$ , und  $f_0$  hat einen einfachen Pol in  $p_0$ .

Nun ist  $Re(f_0)$  mit (9.5) im Komplement jeder Umgebung von  $p_0$  beschränkt. Wir suchen meromorphes  $f$  und  $p \in M$  mit

$$\begin{aligned} f &\text{ ist holomorph in } M - \{p\}, \\ f &\text{ hat einen einfachen Pol in } p, \end{aligned} \tag{9.7}$$

$f$  ist beschränkt im Komplement jeder Umgebung von  $p$ .

Da  $f_0$  einen einfachen Pol bei  $p_0$  hat, ist  $f_0$  in einer offenen Umgebung  $V(p_0)$  von  $p_0$  injektiv. Weiter können wir annehmen, dass der Abschluss  $\overline{V(p_0)}$  kompakt ist. Da  $u$  in  $M - V(p_0)$  mit (9.5) beschränkt ist, haben wir

$$S := \sup_{M-V(p_0)} |u| < \infty. \tag{9.8}$$

Andererseits existiert mit (9.5) ein  $p \in V(p_0)$  mit  $|u(p)| \geq 2S + 1$ . Nun betrachten wir die meromorphe Funktion  $f := 1/(f_0 - f_0(p))$  auf  $M$ . Da  $f_0$  in  $V(p_0)$  injektiv ist, ist  $f$  holomorph in  $V(p_0) - \{p\}$ . Weiter ist  $df_0(p) \neq 0$ , und  $f$  hat einen einfachen Pol in  $p$ . Mit (9.8) sehen wir

$$|f| = 1/|f_0 - f_0(p)| \leq 1/|u - u(p)| \leq 1/(S + 1) < \infty \quad \text{in } M - V(p_0).$$

Zusammen erfüllt  $f$  die Bedingungen (9.7).

Nun setzen wir

$$\begin{aligned} A := \{q \in M \mid &\text{ für eine gebrochen lineare Abbildung } \phi : S^2 \xrightarrow{\approx} S^2 \\ &\text{ erfüllt } \phi \circ f \text{ die Bedingungen (9.7) bei } q \text{ statt } p \}. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Klarerweise ist  $p \in A$ , also  $A \neq \emptyset$ . Weiter ist  $A$  offen, denn für  $q_0 \in A$ ,  $\phi : S^2 \xrightarrow{\approx} S^2$  eine gebrochen lineare Abbildung und  $g_0 := \phi \circ f$  erfüllt (9.7) bei  $q_0$  statt  $p$  sehen wir wie oben, da  $g_0$  einen einfachen Pol bei  $q_0$  hat, dass  $g_0$  in einer offenen Umgebung  $V(q_0)$  von  $q_0$  injektiv ist. Weiter können wir annehmen, dass der Abschluss  $\overline{V(q_0)}$  kompakt ist. Da nun  $g_0$  in  $M - V(q_0)$  mit (9.7) beschränkt ist, haben

$$S := \sup_{M-V(q_0)} |g_0| < \infty. \tag{9.10}$$

Da  $\lim_{q \rightarrow q_0} |g_0(q)| = \infty$ , existiert eine weitere offene Umgebung  $W(q_0) \subseteq V(q_0)$  von  $q_0$  mit  $|g_0(q)| \geq 2S + 1$  für alle  $q \in W(q_0)$ . Nun betrachten wir die meromorphe Funktion  $g := 1/(g_0 - g_0(q))$  auf  $M$  für  $q \in W(q_0) - \{q_0\}$ . Da  $g_0$  in  $V(q_0)$  injektiv ist, ist  $g$  holomorph in  $V(q_0) - \{q\}$ . Weiter ist  $dg_0(q) \neq 0$ , und  $g$  hat einen einfachen Pol in  $q$ . Mit (9.10) sehen wir

$$|g| = 1/|g_0 - g_0(q)| \leq 1/(S + 1) < \infty \quad \text{in } M - V(q_0).$$

Zusammen erfüllt  $g$  die Bedingungen (9.7) bei  $q$  statt  $p$ . Nun ist für die gebrochen lineare Abbildung  $\psi : S^2 \xrightarrow{\approx} S^2$ ,  $\psi(z) := 1/(z - g_0(q))$  die Abbildung  $g = \psi(g_0) = (\psi \circ \phi) \circ f$ , und es folgt  $q \in A$ , also  $W(q_0) \subseteq A$ , und  $A$  ist offen.

Schliesslich ist  $A$  abgeschlossen, denn für  $q_m \in A$  mit  $q_m \rightarrow q \in M$  existieren  $a_m, b_m, c_m, d_m \in \mathbb{C}$  mit  $a_m d_m - b_m c_m \neq 0$  und

$$f_m := \frac{a_m f + b_m}{c_m f + d_m} \text{ erfüllt (9.7) bei } q_m.$$

Da  $p \in A$ , können wir  $q, q_m \neq p$  annehmen, insbesondere  $f(q_m) \neq \infty$ . Da  $f_m$  bei  $q_m$  einen Pol hat, gilt  $c_m f_m(q_m) + d_m = 0$ . Ist  $c_m = 0$ , so folgt  $d_m = 0$ , was unmöglich ist. Daher können wir  $c_m = 1$  annehmen und haben  $d_m = -f(q_m)$ . Wir erhalten

$$f_m = \frac{a_m f + b_m}{f - f(q_m)} = a_m + \frac{b_m + a_m f(q_m)}{f - f(q_m)}.$$

Da  $b_m + a_m f(q_m) = b_m c_m - a_m d_m \neq 0$ , haben wir

$$1/(f - f(q_m)) \text{ erfüllt (9.7) bei } q_m. \quad (9.11)$$

Da  $f$  nicht konstant ist, ist auch  $f - f(q)$  nicht konstant, und für eine Karte  $w : U(q) \xrightarrow{\sim} B_1(0) \subseteq \mathbb{C}$ ,  $q \in U(q)$ ,  $w(q) = 0$ ,  $p \notin U(q)$ , und der Identifikation  $U(q) \cong B_1(0) \subseteq M$  sehen wir für  $0 < \varrho < 1$  klein, dass

$$\inf_{\partial B_\varrho(0)} |f - f(q)| =: 2\delta = 2\delta_\varrho > 0.$$

Da  $q_m \rightarrow q$ , haben wir für festes  $0 < \varrho < 1$  für grosse  $m$ , dass  $q_m \in B_\varrho(0)$  und

$$\inf_{\partial B_\varrho(0)} |f - f(q_m)| \geq \delta. \quad (9.12)$$

Mit (9.11) ist die holomorphe, also auch harmonische Funktion  $1/(f - f(q_m))$  im Komplement der offenen Umgebung  $B_\varrho(0)$  von  $q_m \in B_\varrho(0)$  beschränkt, und, da  $M$  das globale Maximumprinzip erfüllt, folgt

$$\sup_{M - B_\varrho(0)} 1/|f - f(q_m)| \leq \delta^{-1} \quad \text{für grosse } m,$$

und für  $m \rightarrow \infty$ , dass

$$\sup_{M - B_\varrho(0)} 1/|f - f(q)| < \infty \quad \forall \varrho > 0,$$

insbesondere hat  $1/(f - f(q))$  keinen Pol in  $M - \{q\}$  und ist holomorph in  $M - \{q\}$ . Damit erfüllt  $1/(f - f(q))$  die erste und die dritte Bedingung in (9.7) bei  $q$ .

Mit (9.11) hat  $f - f(q_m)$  genau eine Nullstelle in  $M$ , und diese ist bei  $q_m$  und einfach. Weiter haben wir mit (9.12) für grosse  $m$ , dass

$$\sup_{\partial B_\varrho(0)} |(f - f(q)) - (f - f(q_m))| = |f(q) - f(q_m)| < \delta \leq \inf_{\partial B_\varrho(0)} |f - f(q_m)|,$$

und mit dem Satz von Rouché, siehe [Ru] Theorem 10.43 oder [Sch-b] Korollar 2.6, hat  $f - f(q)$  genau eine Nullstelle in  $B_\varrho(0)$ , und diese ist einfach. Diese Nullstelle ist offensichtlich  $q \cong 0$ , also ist  $q$  eine einfache Nullstelle von  $f - f(q)$ , und  $1/(f - f(q))$  hat einen Pol bei  $q$ , und dieser ist einfach. Zusammen erfüllt  $1/(f - f(q))$  die Bedingungen in

(9.7) bei  $q$  und mit der gebrochen linearen Abbildung  $\phi : S^2 \xrightarrow{\sim} S^2, z \mapsto 1/(z - f(q))$  erhalten wir  $q \in A$ , und  $A$  ist abgeschlossen.

Da  $A$  nicht-leer, offen und abgeschlossen ist und  $M$  zusammenhängend ist, folgt  $A = M$ . Damit zeigen wir, dass  $f$  injektiv ist. Angenommen  $f(q) = f(\tilde{q})$  für  $q, \tilde{q} \in M$ . Da  $A = M$ , erfüllt mit (9.9) für eine gebrochen lineare Abbildung  $\phi : S^2 \xrightarrow{\sim} S^2$  die Funktion  $g := \phi \circ f$  die Bedingungen (9.7) bei  $q$ . Also gilt  $g(\tilde{q}) = \phi(f(\tilde{q})) = \phi(f(q)) = g(q) = \infty$ , aber mit (9.7) hat  $g$  nur einen Pol, und dieser ist bei  $q$ . Daher gilt  $\tilde{q} = q$ , und  $f$  ist injektiv.

Damit ist  $M \cong V := f(M) \subseteq S^2$  offen und einfach zusammenhängend. Ist  $V = S^2$ , so ist  $M$  biholomorph zu  $S^2$ , wie gewünscht. Ist  $V \neq S^2$ , so ist für eine gebrochen lineare Abbildung  $\phi : S^2 \xrightarrow{\sim} S^2$  die Menge  $V \cong \phi(V) \subseteq \mathbb{C}$ . Für  $\phi(V) \neq \mathbb{C}$  ist die offene, einfach zusammenhängende Menge  $\phi(V)$  mit dem Riemannschen Abbildungssatz, siehe [Ru] Theorem 14.8 oder [Sch-b] Satz 3.2, biholomorph zu  $D$ , also ist auch  $M$  biholomorph zu  $D$ . Aber mit der 4. Bemerkung nach Definition 8.1 erfüllt  $D$  kein globales Maximumprinzip, und daher gilt dies nicht. Damit ist  $M$  biholomorph zu  $V \cong \phi(V) = \mathbb{C}$ , und das Lemma ist bewiesen.

///

#### **Beweis des Uniformisierungssatzes, Satz 9.1:**

Der Uniformisierungssatz folgt nun aus den Lemmata 9.1 und 9.2.

///

## 10 Universelle Überlagerungen

Mit Proposition B.5 und der darauffolgenden 8. Bemerkung hat jede Riemannsche Fläche eine einfach zusammenhängende und damit universelle, holomorphe Überlagerung, und nach dem Uniformisierungssatz, Satz 9.1, ist diese  $S^2, \mathbb{C}$  oder  $D$  bis auf Biholomorphie. Umgekehrt ist jede universelle, holomorphe Überlagerung einer Riemannschen Fläche einfach zusammenhängend. In diesem Abschnitt wollen wir für einige Riemannsche Flächen die universelle, holomorphe Überlagerung bestimmen.

**Proposition 10.1** *Die einzige Riemannsche Fläche, deren universelle, holomorphe Überlagerung  $S^2$  ist, ist bis auf Biholomorphie  $S^2$  selbst.*

**Beweis:**

$\pi : S^2 \rightarrow M$  sei eine holomorphe Überlagerung einer Riemannschen Fläche. Ist  $\pi$  nicht injektiv, so existierten  $p_1 \neq p_2 \in S^2$  mit  $\pi(p_1) = \pi(p_2) =: q$ . Da  $S^2$  einfach zusammenhängend ist, operieren mit Proposition B.4 die Decktransformationen von  $\pi$  transitiv auf der Faser  $\pi^{-1}(q) \ni p_1, p_2$ , also existiert eine Decktransformation  $\tau$  mit  $\pi \circ \tau = \pi$  und  $\tau(p_1) = p_2$ , insbesondere  $\tau \neq id_{S^2}$ . Mit der 7. Bemerkung nach Proposition B.5 ist die Decktransformation  $\tau : S^2 \xrightarrow{\sim} S^2$  biholomorph. Mit einer geeigneten gebrochen linearen Abbildung  $\phi : S^2 \xrightarrow{\sim} S^2$  erreichen wir  $(\phi \circ \tau)(\infty) = \infty$ , also ist  $\phi \circ \tau : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Mit elementarer Funktionentheorie ist  $\phi \circ \tau$  affin, also ist  $\phi \circ \tau$  und somit auch  $\tau$  eine gebrochen lineare Abbildung, z.B.  $\tau(z) = (az+b)/(cz+d)$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  mit  $ad-bc \neq 0$ . Ist  $c = 0$ , so ist  $\infty$  ein Fixpunkt von  $\tau$ , ist  $c \neq 0$ , so ist eine Nullstelle des quadratischen Polynoms  $(cz+d)z - (az+b)$  ein Fixpunkt von  $\tau$ .

Mit Proposition B.4 ist  $\tau$  aber fixpunktfrei, da  $\tau \neq id_{S^2}$ , und wir erhalten, dass  $\pi$  injektiv ist. Dann ist  $\pi(S^2)$  offen und kompakt in  $M$ , also, da  $M$  zusammenhängend ist, ist  $\pi$  surjektiv. Damit ist  $\pi$  und somit  $S^2 \cong M$  biholomorph, und die Proposition ist bewiesen.

///

**Proposition 10.2** *Die einzigen Riemannschen Flächen, deren universelle, holomorphe Überlagerung  $\mathbb{C}$  ist, sind bis auf Biholomorphie  $\mathbb{C}, \mathbb{C} - \{0\}$  und alle Tori  $\mathbb{C}/\Gamma$  für ein Gitter  $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subseteq \mathbb{C}$  mit  $\omega_1, \omega_2$  linear unabhängig über  $\mathbb{R}$ .*

**Beweis:**

Es sei  $M$  eine Riemannsche Fläche mit universeller, holomorpher Überlagerung  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow M$ . Dann bilden die Decktransformationen von  $\pi$  mit Proposition B.4 und mit der 7. Bemerkung nach Proposition B.5 eine Gruppe biholomorpher Äquivalenzen von  $\mathbb{C}$ , die frei diskontinuierlich auf  $\mathbb{C}$  operiert. Mit elementarer Funktionentheorie sind alle Decktransformationen  $\tau$  von  $\pi$  affin, d.h.  $\tau(z) = az+b$  mit  $a, b \in \mathbb{C}$ . Da die Decktransformationen frei diskontinuierlich auf  $\mathbb{C}$  operieren, sind insbesondere alle Decktransformationen  $\tau \neq id_{\mathbb{C}}$  fixpunktfrei, und wir schliessen  $\tau(z) = z+b$ , d.h. alle Decktransformationen sind Translationen von  $\mathbb{C}$ , und die Gruppe der Decktransformationen ist isomorph zur Gruppe der Translationsvektoren  $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ , insbesondere ist  $\Gamma$  kommutativ. Wieder da die Decktransformationen frei diskontinuierlich auf  $\mathbb{C}$  operieren, hat  $\Gamma$  keine Häufungspunkte in  $\mathbb{C}$ .

Ist  $\Gamma = \{0\}$ , so ist  $\pi$  injektiv, da die Decktransformationen von  $\pi$  mit Proposition B.4 transitiv auf den Fasern von  $\pi$  operieren, also  $\pi : \mathbb{C} \cong M$  biholomorph im Einklang mit der Behauptung.

Ist  $\Gamma \cong \mathbb{Z}$ , also  $\Gamma = \mathbb{Z}\omega$  für ein geeignetes  $\omega \in \Gamma - \{0\}$ , so betrachten wir die universelle, holomorphe Überlagerung  $\tilde{\pi} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$  mit  $\tilde{\pi}(z) := e^{2\pi iz/\omega}$  und sehen

$$\tilde{\pi}(z_1) = \tilde{\pi}(z_2) \iff z_2 - z_1 \in \mathbb{Z}\omega = \Gamma,$$

und die Translationen um Vektoren aus  $\Gamma$  sind gerade die Decktransformationen von  $\tilde{\pi}$ . Damit haben die universellen, holomorphen Überlagerungen  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow M$  und  $\tilde{\pi} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$  die gleichen Decktransformationen, und mit der 9. Bemerkung nach Proposition B.5 sind  $M \cong \mathbb{C} - \{0\}$  biholomorph im Einklang mit der Behauptung.

Ist  $\Gamma \neq \{0\}, \Gamma \not\cong \mathbb{Z}$ , so folgen wir [Ah] Theorem 7.1 und wählen  $\omega_1 \in \Gamma - \{0\}$  mit minimaler Länge, d.h.  $|\omega_1| = \min_{\omega \in \Gamma - \{0\}} |\omega| > 0$ . Dies ist möglich, da  $\Gamma$  keine Häufungspunkte in  $\mathbb{C}$  hat, also  $\Gamma - \{0\}$  abgeschlossen ist. Für  $\omega \in \Gamma \cap \mathbb{R}\omega_1$ , haben wir  $\omega = \lambda\omega_1$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  und für geeignetes  $n \in \mathbb{Z}$  haben wir  $0 \leq \lambda - n < 1$ . Damit ist  $(\lambda - n)\omega_1 \in \Gamma$  und  $|(\lambda - n)\omega_1| < |\omega_1|$ , also  $(\lambda - n)\omega_1 = 0$  bzw.  $\omega = \lambda\omega_1 = n\omega_1 \in \mathbb{Z}\omega_1$ , und  $\Gamma \cap \mathbb{R}\omega_1 \subseteq \mathbb{Z}\omega_1$ . Da  $\mathbb{Z}\omega_1 \subseteq \Gamma, \Gamma \neq \mathbb{Z}\omega_1$ , da  $\Gamma \not\cong \mathbb{Z}$ , ist  $\Gamma - \mathbb{R}\omega_1 \neq \emptyset$ , und wir wählen  $\omega_2 \in \Gamma - \mathbb{R}\omega_1$  mit  $|\omega_2| = \min_{\omega \in \Gamma - \mathbb{R}\omega_1} |\omega| > 0$ , was wieder möglich ist, da  $\Gamma$  keine Häufungspunkte in  $\mathbb{C}$  hat. Insbesondere sind  $\omega_1, \omega_2$  linear unabhängig über  $\mathbb{R}$  und das Gitter  $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subseteq \Gamma$ . Damit ist  $\omega_1, \omega_2$  eine reelle Basis für  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ , und wir können jedes  $\omega \in \Gamma$  als Linearkombination  $\omega = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$  mit  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  schreiben. Für geeignete  $n, m \in \mathbb{Z}$  haben wir  $|\lambda_1 - n|, |\lambda_2 - m| \leq 1/2$  und

$$|\omega - n\omega_1 - m\omega_2| = |(\lambda_1 - n)\omega_1 + (\lambda_2 - m)\omega_2| \leq \frac{1}{2}(|\omega_1| + |\omega_2|) \leq |\omega_2|.$$

Dabei ist die erste Ungleichung strikt, da  $\omega_1$  und  $\omega_2$  keine reellen Vielfachen von einander sind. Da  $\omega - n\omega_1 - m\omega_2 \in \Gamma$ , folgt mit der Minimalität von  $\omega_2$ , dass  $\omega - n\omega_1 - m\omega_2 \in \Gamma \cap \mathbb{R}\omega_1 = \mathbb{Z}\omega_1$ , also  $\omega \in \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ , und  $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ .

Damit haben in diesem Fall die universellen, holomorphen Überlagerungen  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow M$  und  $\tilde{\pi} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$  die gleichen Decktransformationen, und mit der 9. Bemerkung nach Proposition B.5 sind  $M \cong \mathbb{C}/\Gamma$  biholomorph im Einklang mit der Behauptung, und die Proposition ist bewiesen.

///

**Proposition 10.3** *Die einzigen nicht-hyperbolischen Riemannschen Flächen  $M$  sind bis auf Biholomorphie  $S^2, \mathbb{C}, \mathbb{C} - \{0\}$  und alle Tori  $\mathbb{C}/\Gamma$  für ein Gitter  $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subseteq \mathbb{C}$  mit  $\omega_1, \omega_2$  linear unabhängig über  $\mathbb{R}$  und in allen Fällen verschwindet die Kobayashi Metrik  $d_{\mathcal{H}}^M = 0$  identisch, und alle holomorphen Abbildungen  $M \rightarrow N$  in eine hyperbolische Riemannsche Fläche  $N$  sind konstant.*

**Beweis:**

Mit Proposition 5.7 ist die universelle, holomorphe Überlagerung einer nicht-hyperbolischen Riemannschen Fläche  $M$  auch nicht-hyperbolisch, also ist mit dem Uniformisierungssatz, Satz 9.1, die universelle, holomorphe Überlagerung  $S^2$  oder  $\mathbb{C}$ , da  $D$  mit der Bemerkung nach Proposition 5.3 hyperbolisch ist. Mit den Propositionen 10.1

und 10.2 ist  $M$  biholomorph zu  $S^2, \mathbb{C}, \mathbb{C} - \{0\}$  oder einem Torus  $\mathbb{C}/\Gamma$ , und umgekehrt sind diese Riemannsche Flächen nicht-hyperbolisch, da  $S^2$  bzw.  $\mathbb{C}$  ihre universelle, holomorphe Überlagerung ist.

Da  $d_{\mathcal{H}}^{S^2} \leq d_{\mathcal{H}}^{\mathbb{C}} = 0$  mit (5.5) und da Überlagerungsprojektionen surjektiv sind, folgt wie in der 2. Bemerkung nach Proposition 5.2, dass  $d_{\mathcal{H}}^M = 0$ . Weiter folgt wie in der 1. Bemerkung nach Proposition 5.2, dass alle holomorphen Abbildungen  $M \rightarrow N$  in eine hyperbolische Riemannsche Fläche  $N$  konstant sind.

///

**Proposition 10.4** *Auf jeder Riemannschen Fläche  $M$  existiert eine hermitesche Metrik  $g$  mit konstanter Gauss-Krümmung und in der alle beschränkten, abgeschlossenen Mengen in  $M$  kompakt sind, insbesondere ist diese Metrik vollständig.*

*Ist  $S^2$  die universelle, holomorphe Überlagerung von  $M$ , so ist die Gauss-Krümmung  $K_g \equiv \text{const} > 0$ , und ist  $\mathbb{C}$  die universelle, holomorphe Überlagerung von  $M$ , so ist die Gauss-Krümmung  $K_g \equiv 0$ .*

*Ist  $D$  die universelle, holomorphe Überlagerung von  $M$ , d.h.  $M$  ist hyperbolisch, so kann  $g$  so gewählt werden, dass*

$$K_g \equiv -1 \quad \text{und} \quad d_{\mathcal{H}}^M = d_g^M, \quad (10.1)$$

*insbesondere sind auf allen hyperbolischen Riemannschen Flächen in der Kobayashi Metrik beschränkte, abgeschlossene Mengen kompakt, und die Kobayashi Metrik ist vollständig.*

#### Beweis:

Wir schauen uns die Decktransformationen der universellen, holomorphen Überlagerung von  $M$  an. Decktransformationen sind mit der 7. Bemerkung nach Proposition B.5 immer biholomorphe Äquivalenzen. Ist  $D$  die universelle, holomorphe Überlagerung von  $M$ , so sind mit der 4. Bemerkung nach Proposition 4.1 alle biholomorphen Äquivalenzen von  $D$  Isometrien der Poincaré-Metrik  $g_{\text{poin}}$ . Ist  $S^2$  bzw.  $\mathbb{C}$  die universelle, holomorphe Überlagerung von  $M$ , so ist die Identität  $\text{id}_{S^2}$  die einzige Decktransformation bzw. sind alle Decktransformationen Translationen von  $\mathbb{C}$ , wie wir in den Beweisen der Propositionen 10.1 und 10.2 gesehen haben.

In allen Fällen sind die Decktransformationen Isometrien der Standardmetriken  $\hat{g} := g_{S^2}, g_{\text{can}}$  bzw.  $g_{\text{poin}}$  auf  $\hat{M} := S^2, \mathbb{C}$  bzw.  $D$ , die alle konstante Gausskrümmung  $\equiv 1, \equiv 0$  bzw.  $\equiv -1$  haben. Wie in der 5. Bemerkung nach Proposition 4.1 erzeugt daher  $\pi$  eine Pushforward-Metrik  $\pi_*\hat{g} =: g$ , und diese hat konstante Gauss-Krümmung  $K_g \equiv 1, \equiv 0$  bzw.  $\equiv -1$  auf  $M$  und ist mit Proposition 3.6 eine hermitesche Metrik auf  $M$ .

Nun seien  $p, q \in M$  mit  $d_g^M(p, q) < R < \infty$ . Dann existiert für  $\varepsilon > 0$  ein glatter Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$  und

$$L_g^M(\gamma) \leq d_g^M(p, q) + \varepsilon < R$$

für  $\varepsilon > 0$  klein genug. Da  $\pi$  eine Überlagerungsprojektion ist, kann  $\gamma$  mit Proposition B.2 und der darauffolgenden Bemerkung für jedes  $\hat{p} \in \pi^{-1}(p) \neq \emptyset$  zu einem glatten Weg  $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow D$  mit  $\hat{\gamma}(0) = \hat{p}$  und  $\pi \circ \hat{\gamma} = \gamma$  geliftet werden. Da  $\pi$  eine lokale Isometrie für  $\hat{g}$  und  $g$  ist, haben wir

$$L_{\hat{g}}^{\hat{M}}(\hat{\gamma}) = L_g^M(\gamma) < R.$$

Dies ergibt für  $\hat{q} := \hat{\gamma}(1) \in B_R^{d_g^{\hat{M}}}(\hat{p})$ , dass  $\pi(\hat{q}) = q$  und

$$B_R^{d_g^M}(p) \subseteq \pi\left(B_R^{d_g^{\hat{M}}}(\hat{p})\right). \quad (10.2)$$

Für  $\hat{M} = \mathbb{C}$  ist  $\overline{B_R^{d_{g_{can}}^{\mathbb{C}}}(\hat{p})}$  als abgeschlossener euklidischer Ball kompakt, und für  $\hat{M} = D$  ist  $\hat{g} = g_{\text{poins}} = 4(1 - |z|^2)^{-2}g_{\text{can}}$  mit (4.2), und wir sehen  $\lim_{|z| \nearrow 1} d_{g_{\text{poins}}}^D(z, 0) = \infty$ . Daher ist  $B_R^{d_{g_{\text{poins}}}^D}(\hat{p}) \subseteq B_\varrho(0)$  mit  $0 < \varrho < 1$  abhängig von  $\hat{p}$  und  $R$  in einer kompakten Menge enthalten. Für  $\hat{M} = S^2$  ist dies trivial, da  $S^2$  kompakt ist. In allen drei Fällen ist der Abschluss  $\overline{B_R^{d_g^{\hat{M}}}(\hat{p})}$  kompakt, und mit (10.2) folgt

$$B_R^{d_g^M}(p) \subseteq \pi\left(\overline{B_R^{d_g^{\hat{M}}}(\hat{p})}\right) \subseteq M,$$

also ist jede in  $d_g^M$  beschränkte Menge in einer kompakten Teilmenge von  $M$  enthalten, und in  $d_g^M$  beschränkte, abgeschlossene Mengen in  $M$  sind kompakt.

Da alle Cauchyfolgen beschränkt sind und der Abschluss beschränkter Mengen beschränkt bleibt, besitzt jede Cauchyfolge bezüglich  $d_g^M$  eine konvergente Teilfolge und ist damit bereits konvergent, also ist  $d_g^M$  vollständig.

Ist  $D = \hat{M}$  die universelle, holomorphe Überlagerung von  $M$ , so ist  $K_g \equiv -1$ , und mit Proposition 5.3 folgt  $d_{\mathcal{H}}^M \geq d_g^M$ . Für  $p, q \in M$  mit  $d_{\mathcal{H}}^M(p, q) < R < \infty$ , folgt  $d_g^M(p, q) \leq d_{\mathcal{H}}^M(p, q) < R$ , und für obigen Weg  $\gamma$  und seinen Lift  $\hat{\gamma}$  sehen wir mit Proposition 5.2 und (5.4), dass

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{H}}^M(p, q) &= d_{\mathcal{H}}^M(\gamma(0), \gamma(1)) = d_{\mathcal{H}}^M(\pi(\hat{\gamma}(0)), \pi(\hat{\gamma}(1))) \leq d_{\mathcal{H}}^D(\hat{\gamma}(0), \hat{\gamma}(1)) \leq \\ &\leq d_{g_{\text{poins}}}^D(\hat{\gamma}(0), \hat{\gamma}(1)) \leq L_{g_{\text{poins}}}^D(\hat{\gamma}) = L_g^M(\gamma) \leq d_g^M(p, q) + \varepsilon, \end{aligned}$$

und, da  $p, q \in M$  beliebig und  $\varepsilon > 0$  beliebig klein waren, erhalten wir

$$d_{\mathcal{H}}^M = d_g^M,$$

also (10.1). Damit ist die Proposition bewiesen.

///

**Proposition 10.5** *Es sei  $M$  eine kompakte Riemannsche Fläche.*

1. *Ist  $M$  vom Geschlecht 0, so ist  $M$  biholomorph zu  $S^2$ .*
2. *Ist  $M$  vom Geschlecht 1, so ist  $\mathbb{C}$  die universelle, holomorphe Überlagerung von  $M$ , und  $M$  ist biholomorph zu einem Torus  $\mathbb{C}/\Gamma$  für ein Gitter  $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subseteq \mathbb{C}$  mit  $\omega_1, \omega_2$  linear unabhängig über  $\mathbb{R}$ .*
3. *Ist  $M$  vom Geschlecht  $\geq 2$ , so ist  $D$  die universelle, holomorphe Überlagerung von  $M$ , und  $M$  ist hyperbolisch.*

**Beweis:**

Mit der vorigen Proposition 10.4 existiert eine hermitesche Metrik  $g$  auf  $M$  mit konstanter Gauss-Krümmung. Mit dem Satz von Gauss-Bonnet, Satz 4.1, erhalten wir

$$\int_M K_g \, d\mu_g = 2\pi\chi(M) = 4\pi(1 - g(M)),$$

wobei  $g(M)$  das Geschlecht von  $M$  ist. Wir sehen, ist  $g(M) = 0$ , so ist  $K_g \equiv \text{const} > 0$ , und mit den Propositionen 10.4 und 10.1 ist  $M$  biholomorph zu  $S^2$ . Ist  $g(M) \geq 2$ , so ist  $K_g \equiv \text{const} < 0$ , und mit Proposition 10.4 ist  $D$  die universelle, holomorphe Überlagerung von  $M$ , also ist  $M$  mit Proposition 5.7 hyperbolisch. Ist  $g(M) = 1$ , so ist  $K_g \equiv 0$ , und mit Proposition 10.4 ist  $\mathbb{C}$  die universelle, holomorphe Überlagerung von  $M$ , also ist  $M$  mit Proposition 10.2 biholomorph zu  $\mathbb{C}, \mathbb{C} - \{0\}$  oder zu einem Torus  $\mathbb{C}/\Gamma$ . Da  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{C} - \{0\}$  nicht kompakt sind und  $M$  kompakt ist, ist  $M$  biholomorph zu einem Torus  $\mathbb{C}/\Gamma$ .

///

Auch können alle Riemannschen Flächen mit kommutativer Fundamentalgruppe bestimmen

**Proposition 10.6** *Die einzigen Riemannsche Flächen  $M$  mit kommutativer Fundamentalgruppe sind bis auf Biholomorphie*

1.  $S^2, \mathbb{C}$  und  $D$  mit  $\pi_1(M) = \{id_M\}$ ,
2.  $\mathbb{C} - \{0\}, \dot{D}$  und  $D - \overline{B_r(0)}, 0 < r < 1$  mit  $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$ ,
3. alle Tori  $\mathbb{C}/\Gamma$  für ein Gitter  $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subseteq \mathbb{C}$  mit  $\omega_1, \omega_2$  linear unabhängig über  $\mathbb{R}$  und  $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

**Beweis:**

Mit dem Uniformisierungssatz, Satz 9.1, ist die universelle, holomorphe Überlagerung von  $M$  durch  $S^2, \mathbb{C}$  oder  $D \cong \mathcal{H}$  gegeben. Ist  $S^2$  die universelle, holomorphe Überlagerung von  $M$ , so folgt mit Propositionen 10.1, dass  $M \cong S^2$ , also haben wir die Aussage unter dem ersten Punkt. Ist  $\mathbb{C}$  die universelle, holomorphe Überlagerung von  $M$ , so folgt mit Propositionen 10.2, dass  $M \cong \mathbb{C}, \mathbb{C} - \{0\}$  oder  $\mathbb{C}/\Gamma$ , was durch die obigen drei Aussagen abgedeckt ist.

Ist schliesslich  $\mathcal{H}$  die universelle, holomorphe Überlagerung von  $M$ , so ist nach Definition B.3 und der darauffolgenden 5. Bemerkung die Fundamentalgruppe  $\pi_1(M)$  eine frei diskontinuierlich operierende Untergruppe von biholomorphen Äquivalenzen auf der universellen, holomorphen Überlagerung  $\mathcal{H}$ , d.h.  $\pi_1(M) \subseteq \text{Aut}(\mathcal{H})$ . Mit Proposition C.5 ist  $\pi_1(M)$  konjugiert zu einer Gruppe horizontaler Translationen oder zu einer Gruppe von Streckungen, genauer

$$\phi\pi_1(M)\phi^{-1} = \{(z \mapsto z + k) \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad (10.3)$$

oder

$$\phi\pi_1(M)\phi^{-1} = \{(z \mapsto \lambda^k z) \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ mit } \lambda > 1, \quad (10.4)$$

für ein  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{H})$ . Mit  $\mathcal{H} \rightarrow M$  ist auch  $\mathcal{H} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \rightarrow M$  eine universelle, holomorphe Überlagerung von  $M$ , und

$$\pi_1(\mathcal{H} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \rightarrow M) = \phi^{-1} \pi_1(\mathcal{H} \rightarrow M) \phi,$$

und wir können  $\phi = \text{id}_{\mathcal{H}}$  annehmen.

Im Fall von (10.3) betrachten wir die universelle, holomorphe Überlagerung  $\pi : \mathcal{H} \rightarrow \dot{D}$  mit  $\pi(z) := e^{2\pi iz}$  und sehen

$$\pi(z_1) = \pi(z_2) \iff z_2 - z_1 \in \mathbb{Z} = \pi_1(M).$$

Damit haben die universellen, holomorphen Überlagerungen  $\mathcal{H} \rightarrow M$  und  $\pi : \mathcal{H} \rightarrow \dot{D}$  die gleichen Decktransformationen, und mit der 9. Bemerkung nach Proposition B.5 sind  $M \cong \dot{D}$  biholomorph, also haben wir die Aussage unter dem zweiten Punkt.

Im Fall von (10.4) wählen wir den holomorphen Logarithmus  $\log : \mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \times ]0, \pi[$ , setzen  $\tau := \log \lambda > 0, r := e^{-2\pi^2/\tau} \in ]0, 1[$  und betrachten die universelle, holomorphe Überlagerung  $\pi : \mathcal{H} \rightarrow D - \overline{B_r(0)}$  mit  $\pi(z) := \exp(2\pi i \tau^{-1} \log z)$  und sehen

$$\begin{aligned} \pi(z_1) &= \pi(z_2) \\ \iff \tau^{-1}(\log z_2 - \log z_1) &\in \mathbb{Z} \\ \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z_2/z_1 &= \exp(\log z_2 - \log z_1) = e^{\tau k} = \lambda^k \\ \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z_2 &= \lambda^k z_1. \end{aligned}$$

Damit haben die universellen, holomorphen Überlagerungen  $\mathcal{H} \rightarrow M$  und  $\pi : \mathcal{H} \rightarrow D - \overline{B_r(0)}$  die gleichen Decktransformationen, und mit der 9. Bemerkung nach Proposition B.5 sind  $M \cong D - \overline{B_r(0)}$  biholomorph, also haben wir die Aussage unter dem zweiten Punkt.

///

### Bemerkung:

Jede Riemannsche Fläche  $T$  homöomorph zu einem Torus  $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$  hat die Fundamentalgruppe  $\pi_1(T) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , da die Fundamentalgruppe eine topologische Invariante ist, und ist somit nach obiger Proposition biholomorph äquivalent zu  $\mathbb{C}/\Gamma$  für ein geeignetes Gitter  $\Gamma$ .

□

**Proposition 10.7** *Die Fundamentalgruppe einer Riemannschen Fläche ist torsionsfrei, d.h. für alle Gruppenelemente  $\tau \neq \text{id}$  und alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $\tau^k \neq \text{id}$ .*

### Beweis:

Nach Definition B.3 und der darauffolgenden 5. Bemerkung ist die Fundamentalgruppe  $\pi_1(M)$  einer Riemannschen Fläche eine frei diskontinuierlich operierende Untergruppe von biholomorphen Äquivalenzen auf der universellen, holomorphen Überlagerung, insbesondere ist die Fundamentalgruppe fixpunktfrei, d.h. jedes Element  $\tau \neq \text{id}$  der Fundamentalgruppe hat keine Fixpunkte.

Ist die Fundamentalgruppe kommutativ, so ist diese nach Proposition 10.6 torsionfrei. Ist die Fundamentalgruppe nicht kommutativ, so ist mit dem Uniformisierungssatz, Satz 9.1, und den Propositionen 10.1, 10.2 und 10.6 die universelle, holomorphe Überlagerung durch  $D \cong \mathcal{H}$  gegeben. Mit Proposition C.4 sind alle fixpunktfreien biholomorphen Äquivalenzen von  $\mathcal{H} \cong D$  von unendlicher Ordnung, also ist die Fundamentalgruppe eine torsionfreie Untergruppe von  $Aut(\mathcal{H})$ , und die Proposition folgt.

///

## Teil IV

# Appendix

## A Simpliciale Homologie

**Definition A.1** *Es sei  $M$  eine kompakte Riemannsche Fläche mit einer Triangulierung  $\{T^k\}$  wie in Definition 4.2, die mit Satz von Rado existiert, siehe nach der Bemerkung zu Definition 4.2.  $T^k$  seien die Flächen der Triangulierung und  $\Gamma_m^k$  die orientierten Kanten und  $p_m^k, m = 1, 2, 3$ , die Ecken von  $T^k$ . Dabei sind die Kanten positiv orientiert in dem Sinne, dass beim Durchlaufen der Kanten die Fläche  $T^k$  links liegt. Wir betrachten den Ketten-Komplex  $C = C(\{T^k\})$  von komplexen Vektorräume mit*

$$\begin{aligned} C_2 &:= \oplus_{T^k} \mathbb{C}, \\ C_1 &:= \oplus_{\Gamma_m^k} \mathbb{C} / \{ \Gamma_m^k + \Gamma_{m'}^{k'} \mid \text{entgegengesetzt orientierte Kanten} \}, \\ C_0 &:= \oplus_{p_m^k} \mathbb{C}, \end{aligned}$$

$C_k := 0$  für  $k \geq 3$  oder  $k < 0$  und den Randoperatoren

$$\partial_2 : C_2 \rightarrow C_1, \quad \partial T^k := \sum_{m=1}^3 \Gamma_m^k$$

und, wenn wir mit  $\Gamma_m^k := [p_{m-1}^k, p_m^k]$  die Kanten bezeichnen, die die Ecken von  $p_{m-1}^k$  nach  $p_m^k$  verbinden, wobei  $p_0^k = p_3^k$ , so

$$\partial_1 : C_1 \rightarrow C_0, \quad \partial \Gamma_m^k := p_m^k - p_{m-1}^k,$$

geschrieben

$$\dots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Mit  $\partial^2 = 0$  definieren wir die simpliciale Homologie des Ketten-Komplex durch

$$H_l(\{T^k\}) = H_l(C) := \ker \partial_l / \text{im } \partial_{l+1},$$

die Homologieklassen bezeichnen wir mit  $[\cdot]$ .

Die Euler-Charakteristik des Ketten-Komplex und der simplicialen Homologie sind definiert durch

$$\chi(C) := \dim_{\mathbb{C}} C_2 - \dim_{\mathbb{C}} C_1 + \dim_{\mathbb{C}} C_0$$

und

$$\chi(H(\{T^k\})) := \dim_{\mathbb{C}} H_2(\{T^k\}) - \dim_{\mathbb{C}} H_1(\{T^k\}) + \dim_{\mathbb{C}} H_0(\{T^k\}).$$

□

### Bemerkungen:

Klarerweise stimmen die Euler-Charakteristik des Ketten-Komplexes und der Triangulierung bzw. von  $M$  überein, d.h.  $\chi(C) = \chi(M)$ .

□

**Proposition A.1** *Es sei  $M$  eine kompakte Riemannsche Fläche mit einer Triangulierung  $\{T^k\}$ . Dann stimmen die Euler-Charakteristik der simplizialen Homologie der Triangulierung und die Euler-Charakteristik der Triangulierung bzw. von  $M$  überein, d.h.*

$$\chi(H(\{T^k\})) = \chi(M).$$

Genauer gilt

$$H_2(\{T^k\}), H_0(\{T^k\}) \cong \mathbb{C}, \quad (\text{A.1})$$

und für das Geschlecht  $2g(M) = 2 - \chi(M)$  gilt

$$\dim_{\mathbb{C}} H_1(\{T^k\}) = 2g(M). \quad (\text{A.2})$$

**Beweis:**

Wir sehen

$$\dim_{\mathbb{C}} H_2(\{T^k\}) = \dim_{\mathbb{C}} \ker \partial_2,$$

$$\dim_{\mathbb{C}} H_1(\{T^k\}) = \dim_{\mathbb{C}} (\ker \partial_1 / \text{im } \partial_2),$$

$$\dim_{\mathbb{C}} H_0(\{T^k\}) = \dim_{\mathbb{C}} (\ker \partial_0 / \text{im } \partial_1),$$

also mit der Rangregel

$$\chi(M) = 2(1 - g(M)) = \dim_{\mathbb{C}} C_2 - \dim_{\mathbb{C}} C_1 + \dim_{\mathbb{C}} C_0 =$$

$$= \dim_{\mathbb{C}} \ker \partial_2 + \dim_{\mathbb{C}} \text{im } \partial_2 - \dim_{\mathbb{C}} \ker \partial_1 - \dim_{\mathbb{C}} \text{im } \partial_1 + \dim_{\mathbb{C}} \ker \partial_0 + \dim_{\mathbb{C}} \text{im } \partial_0 =$$

$$= \dim_{\mathbb{C}} H_2(\{T^k\}) - \dim_{\mathbb{C}} H_1(\{T^k\}) + \dim_{\mathbb{C}} H_0(\{T^k\}) = \chi(H(\{T^k\})),$$

da  $\text{im } \partial_0 \subseteq C_{-1} = \{0\}$ , und die Identität mit den Euler-Charakteristiken folgt.

Wir definieren  $\deg : C_0 \rightarrow \mathbb{C}, p_m^k \mapsto 1$  und sehen  $\text{im } \deg = \mathbb{C}$  und

$$\deg \partial \Gamma_m^k = \deg(p_m^k - p_{m-1}^k) = 0,$$

also  $\text{im } \partial_1 \subseteq \ker \deg$ . Umgekehrt betrachten wir  $\sum_{l=1}^L \alpha_l p_l \in \ker \deg$  mit  $\alpha_1, \dots, \alpha_L \in \mathbb{C}$  und  $p_1, \dots, p_L$  paarweise verschiedene Ecken. Wir haben  $0 = \deg \sum_{l=1}^L \alpha_l p_l = \sum_{l=1}^L \alpha_l$ .

Zuerst betrachten  $\alpha_l = n_l \in \mathbb{Z}$ . Ist  $n_1 \neq 0$ , so gibt es ein  $l_0 = 2, \dots, L$  mit  $n_1 \cdot n_{l_0} < 0$ . Wir behaupten, es gibt orientierte Kanten  $[q_0, q_1], \dots, [q_{m-1}, q_m]$  der Triangulierung, die  $p_1 = q_0$  und  $p_{l_0} = q_m$  verbinden. Dazu nennen wir zwei Flächen  $T^k \sim T^{k'}$  äquivalent, wenn sich diese durch eine Kette  $T_{k_1}, \dots, T_{k_J}$  mit  $k_1 = k, k_J = k', j = 1, \dots, J$  und

$$T_{k_{j-1}} \cap T_{k_j} \neq \emptyset \quad \text{für } j = 1, \dots, J$$

verbinden lassen. Da die Triangulierung der kompakten Riemannschen Fläche  $M$  endlich ist, sind die Vereinigungen der Äquivalenzklassen abgeschlossene, paarweise disjunkte Mengen. Da  $M$  als Riemannsche Fläche zusammenhängend ist, kann es also nur eine Äquivalenzklasse geben, d.h. alle Fläche sind zueinander äquivalent, insbesondere gibt es eine Kette wie oben mit  $p_1 \in T_{k_1}$  und  $p_l \in T_{k_J}$ . Da sich alle Ecken einer Fläche durch eine Kanten verbinden lassen und da Fläche mit nicht-leerem Schnitt mindestens eine gemeinsame Ecke haben, lassen sich  $p_1$  und  $p_{l_0}$  durch orientierte Kanten  $[q_0, q_1], \dots, [q_{m-1}, q_m]$  mit  $p_1 = q_0$  und  $p_{l_0} = q_m$  verbinden. Wir sehen

$$\partial([q_0, q_1], \dots, [q_{m-1}, q_m]) = p_{l_0} - p_1,$$

also

$$\sum_{l=1}^L n_l p_l + \operatorname{sgn} n_1 \cdot \partial([q_0, q_1], \dots, [q_{m-1}, q_m]) = \sum_{l=1}^L \tilde{n}_l p_l$$

mit  $|\tilde{n}_1| < |n_1|, |\tilde{n}_{l_0}| < |n_{l_0}|$  und  $\tilde{n}_l = n_l$  für  $l \neq 1, l_0$ . Da  $\sum_{l=1}^L \tilde{n}_l = \sum_{l=1}^L n_l = 0$ , folgt nun mit Induktion über  $\sum_{l=1}^L |n_l| \in \mathbb{N}_0$ , dass  $\sum_{l=1}^L n_l p_l \in \operatorname{im} \partial_1$ .

Für  $\alpha_l = q_l \in \mathbb{Q}$ , haben wir für ein geeignetes  $N \in \mathbb{N}$ , dass  $N \sum_{l=1}^L q_l p_l = \sum_{l=1}^L n_l p_l \in \ker \deg$  mit  $n_l \in \mathbb{Z}$ , und erhalten  $\sum_{l=1}^L q_l p_l \in (1/N) \operatorname{im} \partial_1 = \operatorname{im} \partial_1$ .

Für allgemeine  $\alpha_l \in \mathbb{C}$  wählen wir eine Basis  $\xi_1, \dots, \xi_J \in \mathbb{C}$  von  $\operatorname{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_L\}$  über  $\mathbb{Q}$  und schreiben  $\alpha_l = \sum_{j=1}^J q_l^j \xi_j$ . Dies ergibt

$$0 = \deg \sum_{l=1}^L \alpha_l p_l = \sum_{j=1}^J \xi_j \sum_{l=1}^L q_l^j,$$

also  $\sum_{l=1}^L q_l^j = 0$ , und wir schliessen  $\sum_{l=1}^L q_l^j p_l \in \operatorname{im} \partial_1$  für  $j = 1, \dots, J$  und  $\sum_{l=1}^L \alpha_l p_l \in \operatorname{im} \partial_1$ . Zusammen erhalten wir  $\ker \deg = \operatorname{im} \partial_1$ , also

$$H_0(\{T^k\}) = C_0 / \operatorname{im} \partial_1 = C_0 / \ker \deg \cong \operatorname{im} \deg = \mathbb{C},$$

d.h. die Isomorphie für  $H_0(\{T^k\})$  in (A.1).

Nun zeigen wir

$$\ker \partial_2 = \operatorname{span}\left\{\sum_k T^k\right\} \cong \mathbb{C}. \quad (\text{A.3})$$

Dies ergibt die Isomorphie für  $H_2(\{T^k\})$  in (A.1) und mit der Identität für die Euler-Charakteristiken, dass

$$\dim_{\mathbb{C}} H_1(\{T^k\}) = \dim_{\mathbb{C}} H_2(\{T^k\}) + \dim_{\mathbb{C}} H_0(\{T^k\}) - 2(1 - g(\{T^k\})) = 2g(\{T^k\}),$$

also (A.2).

Zuerst sehen wir

$$\partial \sum_k T^k = \sum_k \sum_{m=1}^3 \Gamma_m^k = 0,$$

da in der letzten Summe alle Kanten zweimal, aber in entgegengesetzter Orientierung auftreten. Nun seien umgekehrt  $\alpha^k \in \mathbb{C}$  mit

$$0 = \partial \sum_k \alpha^k T^k = \sum_k \sum_{m=1}^3 \alpha^k \Gamma_m^k.$$

Da wieder in der letzten Summe alle Kanten zweimal, aber in entgegengesetzter Orientierung auftreten, ist  $\alpha^k = \alpha^{k'}$  für Flächen  $T^k$  und  $T^{k'}$ , die eine gemeinsame Kanten haben. Nun nennen wir zwei Flächen  $T^k \approx T^{k'}$  stark äquivalent, wenn sich diese durch eine Kette  $T_{k_1}, \dots, T_{k_J}$  mit  $k_1 = k, k_J = k', j = 1, \dots, J$  und

$$T_{k_{j-1}} \text{ und } T_{k_j} \text{ haben eine gemeinsame Kante für } j = 1, \dots, J$$

verbinden lassen. Klarerweise gilt  $T^k \approx T^{k'} \Rightarrow T^k \sim T^{k'}$ . Andererseits sind für jede Ecke der Triangulierung alle Flächen, die diese Ecke haben, durch eine Kette von Flächen mit

gemeinsamen Kanten, die sich in dieser Ecken treffen, verbindbar. Damit sind die beiden Äquivalenzen gleich  $T^k \approx T^{k'} \Leftrightarrow T^k \sim T^{k'}$ , und, da alle Flächen, wie oben gesehen, äquivalent sind, sind auch alle Flächen stark äquivalent. Für stark äquivalente Flächen  $T^k$  und  $T^{k'}$  gilt aber, wie oben bemerkt,  $\alpha^k = \alpha^{k'}$ , also ist  $\sum_k \alpha^k T^k \in \text{span}\{\sum_k T^k\}$ . Dies ergibt (A.3), und die Proposition ist bewiesen.

///

**Bemerkung:**

Wir sehen, die simpliziale Homologie ist unabhängig von der Triangulierung, da die Euler-Charakteristik von  $M$  mit dem Satz von Gauss-Bonnet, Satz 4.1, und der darauffolgenden 1. Bemerkung unabhängig von der Triangulierung ist. Damit nennen wir

$$H_l(M) = H_l(M, \mathbb{C}) := H_l(\{T^k\})$$

die simpliziale Homologie bzw. genauer die simpliziale Homologie mit Koeffizienten in  $\mathbb{C}$  von  $M$ . Weiter ist  $2g(M) \in \mathbb{N}_0$ , tatsächlich gilt  $g(M) \in \mathbb{N}_0$ , wie der Satz von Rado nach der Bemerkung zu Definition 4.2 aussagt.

□

## B Überlagerungsprojektionen

**Definition B.1** Eine surjektive Abbildung  $\pi : \hat{X} \rightarrow X$  zwischen zwei topologischen Räumen  $\hat{X}$  und  $X$  heisst eine topologische Überlagerungsprojektion oder kurz eine Überlagerungsprojektion, wenn zu jedem  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U(x)$  von  $x$  existiert, für die  $\pi^{-1}(U(x)) = \sum_k V_k$ ,  $V_k$  offen und  $\pi|_{V_k} \xrightarrow{\sim} U(x)$  ein Homöomorphismus ist. Wir sagen auch  $\hat{X}$  ist eine Überlagerung von  $X$ .

Für  $f : Y \rightarrow X$  stetig auf einem topologischen Raum  $Y$  heisst eine stetige Abbildung  $\hat{f} : Y \rightarrow \hat{X}$  ein Lift, wenn  $\pi \circ \hat{f} = f$ , d.h. wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & \hat{X} \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

kommutativ ist.

□

### Bemerkungen:

1. Ist  $X$  lokal zusammenhängend, so ist  $\pi : \hat{X} \rightarrow X$  eine Überlagerungsprojektion genau dann, wenn für jede Zusammenhangskomponente  $Z$  von  $X$  die Einschränkungen  $\pi|_{\pi^{-1}(Z)} : \pi^{-1}(Z) \rightarrow Z$  Überlagerungsprojektionen sind.
2. Ist  $U \subseteq X$  offen, zusammenhängend,  $\pi^{-1}(U) = \sum_k V_k$ ,  $V_k$  offen und  $\pi|_{V_k} \xrightarrow{\sim} U$  ein Homöomorphismus wie in Definition B.1, so sind alle  $V_k$  offen, zusammenhängend und abgeschlossen in  $\pi^{-1}(U)$ , also sind  $V_k$  die Zusammenhangskomponenten von  $\pi^{-1}(U)$ , insbesondere ist die Zerlegung  $\pi^{-1}(U) = \sum_k V_k$  eindeutig.
3. Ist  $X$  lokal zusammenhängend, so ist für jede Zusammenhangskomponente  $\hat{Z}$  von  $\hat{X}$  die Einschränkung  $\pi|_{\hat{Z}} : \hat{Z} \rightarrow \pi(\hat{Z})$  eine Überlagerungsprojektion.

□

Wir haben folgende Eindeutigkeit von Lifts von Überlagerungsprojektionen.

**Proposition B.1**  $\pi : \hat{X} \rightarrow X$  sei eine Überlagerungsprojektion und  $\hat{f}, \hat{g} : Y \rightarrow \hat{X}$  stetig auf einem topologischen Raum  $Y$  mit  $\pi \circ \hat{f} = \pi \circ \hat{g}$ . Stimmen  $f$  und  $g$  in einem  $y_0 \in Y$  überein und ist  $Y$  zusammenhängend, so gilt  $\hat{f} = \hat{g}$ .

### Beweis:

Wir betrachten  $A := [f = g] \subseteq Y$ . Klarerweise ist  $y_0 \in A \neq \emptyset$ , und  $A$  ist abgeschlossen, da  $f$  und  $g$  stetig sind.

Für  $y \in A$  und  $x := f(y) = g(y)$  wählen wir eine offene Umgebung  $U(x)$  von  $x$ , für die  $\pi^{-1}(U(x)) = \sum_k V_k$ ,  $V_k$  offen und  $\pi|_{V_k} \xrightarrow{\sim} U(x)$  ein Homöomorphismus wie Definition B.1 ist. Da  $f$  und  $g$  stetig sind, existiert eine offene Umgebung

$W(y)$  von  $y$  mit  $f(W(y)), g(W(y)) \subseteq U(x)$ . Da  $\pi \circ f = \pi \circ g$  und  $\pi$  auf  $U(x)$  injektiv ist, folgt  $f = g$  in  $W(y)$ , also  $W(y) \subseteq A$ , und  $A$  ist offen.

Da  $Y$  zusammenhängend ist, folgt  $A = Y$  und  $f = g$ , und die Proposition ist bewiesen.

///

Die Bedeutung der Überlagerungsprojektionen liegt in der folgenden Homotopie-Liftungseigenschaft.

**Proposition B.2** Jede Überlagerungsprojektion  $\pi : \hat{X} \rightarrow X$  besitzt die Homotopie-Liftungseigenschaft für jeden topologischen Raum  $Y$ , d.h. für stetige Abbildungen  $F : Y \times [0, 1] \rightarrow X$  und  $\hat{f} : Y \rightarrow \hat{X}$  mit  $F(., 0) = \pi \circ \hat{f}$  existiert ein stetiger Lift  $\hat{F} : Y \times [0, 1] \rightarrow \hat{X}$  mit  $\pi \circ \hat{F} = F$  und  $\hat{F}(., 0) = \hat{f}$  bzw. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y \times \{0\} \cong Y & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{X} \\ \downarrow \subseteq & \nearrow \hat{F} & \downarrow \pi \\ Y \times [0, 1] & \xrightarrow{F} & X \end{array}$$

kann kommutativ ergänzt werden.

**Beweis:**

Wir zeigen, zu jedem  $y \in Y$  existiert eine offene Umgebung  $U(y)$  von  $y$  und eine stetige Abbildung  $\hat{F}_y : U(y) \times [0, 1] \rightarrow \hat{X}$  mit  $\pi \circ \hat{F}_y = F$  und  $\hat{F}_y(z, 0) = \hat{f}(z)$  für alle  $z \in U(y)$ . Für  $0 \leq t \leq 1$  existiert zu  $x := F(y, t) \in X$  eine offene Umgebung  $U(x)$  von  $x$  wie in Definition B.1, und, da  $F$  stetig ist, existieren offene Umgebung  $U_t(y)$  von  $y$  und  $I(t)$  von  $t$  mit  $F(U_t(y) \times I(t)) \subseteq U(x)$ . Da  $[0, 1]$  kompakt ist, existieren endlich viele  $\tilde{t}_j \in [0, 1]$  mit  $[0, 1] = \bigcup_{j=1}^J I(\tilde{t}_j)$ . Setzen wir  $U(y) := \bigcap_{j=1}^J U_{\tilde{t}_j}(y)$ , so existieren endlich viele  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$  und  $x_1, \dots, x_N$  und offene Umgebungen  $U(x_n)$  von  $x_n$  wie in Definition B.1 mit

$$F(U(y) \times [t_{n-1}, t_n]) \subseteq U(x_n) \quad \text{für } n = 1, \dots, N. \quad (\text{B.1})$$

Wir setzen  $\hat{F}_y(z, 0) = \hat{f}(z)$  für  $z \in U(y)$ . Sei nun  $n \geq 1$  und  $\hat{F}_y : U(y) \times [0, t_{n-1}] \rightarrow \hat{X}$  sei bereits stetig und mit  $\pi \circ \hat{F}_y = F$  definiert. Für  $\pi^{-1}(U(x_n)) = \sum_{k \in I_n} V_{n,k}$ ,  $V_{n,k}$  offen und  $\pi|_{V_{n,k}} \xrightarrow{\sim} U$  ein Homöomorphismus wie in Definition B.1, sehen wir mit (B.1), dass

$$\begin{aligned} U(y) &= F(., t_{n-1})^{-1}(U(x_n)) = \hat{F}_y(., t_{n-1})^{-1}(\pi^{-1}(U(x_n))) = \\ &= \sum_{k \in I_n} \hat{F}_y(., t_{n-1})^{-1}(V_{n,k}) =: \sum_{k \in I_n} U_{n,k}. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\hat{F}_y := (\pi|_{V_{n,k}})^{-1} \circ F \quad \text{auf } U_{n,k} \times \{t_{n-1}\},$$

und mit

$$\hat{F}_y := (\pi|_{V_{n,k}})^{-1} \circ F \quad \text{auf } U_{n,k} \times [t_{n-1}, t_n],$$

ist, da  $U_{n,k}$  offen und paarweise disjunkt sind,  $\hat{F}_y$  wohldefiniert und stetig auf  $U(y) \times [t_{n-1}, t_n]$  mit  $\pi \circ \hat{F}_y = F$ . Mit Induktion definiert dies eine stetige Abbildung  $\hat{F}_y : U(y) \times [0, 1] \rightarrow \hat{X}$  mit  $\pi \circ \hat{F}_y = F$  und  $\hat{F}_y(z, 0) = \hat{f}(z)$  für alle  $z \in U(y)$ .

Für  $y_1, y_2 \in Y$  und  $z \in U(y_1) \cap U(y_2)$  sind  $\hat{F}_{y_1}(z, \cdot)$  und  $\hat{F}_{y_2}(z, \cdot)$  zwei Lifts von  $F(z, \cdot)$  auf dem zusammenhängenden Raum  $\{z\} \times [0, 1]$  und mit  $\hat{F}_{y_1}(z, 0) = \hat{f}(z) = \hat{F}_{y_2}(z, 0)$ . Mit Proposition B.1 folgt  $\hat{F}_{y_1}(z, \cdot) = \hat{F}_{y_2}(z, \cdot)$ , und somit ist  $\hat{F}(z, t) := \hat{F}_y(z, t)$  für  $z \in U(y), 0 \leq t \leq 1$  wohldefiniert, stetig auf  $U(y) \times [0, 1]$  für alle  $y \in Y$ , also stetig auf  $Y \times [0, 1]$ , und mit  $\pi \circ \hat{F} = F$  und  $\hat{F}(\cdot, 0) = \hat{f}$ . Zusammen ist  $\hat{F}$  der gewünschte Lift, und die Proposition ist bewiesen.

///

### Bemerkungen:

1. Für den einpunktigen topologischen Raum  $Y$  sehen wir, jeder Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  hat an jedem Punkt  $\hat{x} \in \pi^{-1}(\gamma(0)) \neq \emptyset$  einen Lift bzw. gelifteten Weg  $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \hat{X}$  mit  $\pi \circ \hat{\gamma} = \gamma$  und  $\hat{\gamma}(0) = \hat{x}$ .

Mit Proposition B.1 ist der geliftete Weg mit gegebenem Anfangspunkt eindeutig, insbesondere werden konstante Wege in konstante Wege geliftet.

2. Mit der Homotopie-Liftungs-Eigenschaft in Proposition B.2 werden homotope Wege  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$ , d.h. es existiert eine Homotopie, d.h. eine stetige Abbildung  $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  mit

$$\begin{aligned} F(\cdot, 0) &= \gamma_0, & F(\cdot, 1) &= \gamma_1, \\ F(0, \cdot) &= \gamma_0(0), & F(1, \cdot) &= \gamma_0(1), \end{aligned}$$

und geschrieben  $\gamma_1 \simeq \gamma_2$ , in homotope Wege geliftet, da konstante Wege in konstante Wege geliftet werden. Insbesondere werden null-homotope geschlossene Wege, d.h. Wege, die zu einem konstanten Weg homotop sind, in geschlossene Wege geliftet.

□

Allgemeiner können auf einfach zusammenhängenden topologischen Räumen, d.h. wegzusammenhängende topologische Räume, in denen alle geschlossene Wege null-homotop sind, alle stetigen Abbildungen geliftet werden.

**Proposition B.3**  $\pi : \hat{X} \rightarrow X$  sei eine Überlagerungsprojektion,  $Y$  ein einfach zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender topologischer Raum und  $f : Y \rightarrow X$  stetig.

Dann existiert zu jedem  $y_0 \in Y, \hat{x}_0 \in \pi^{-1}(f(y_0))$  ein eindeutiger Lift  $\hat{f} : Y \rightarrow \hat{X}$  mit  $\pi \circ \hat{f} = f$  und  $\hat{f}(y_0) = \hat{x}_0$ .

□

### Beweis:

Da  $Y$  einfach zusammenhängend ist, ist  $Y$  in unserer Konvention wegzusammenhängend, andernfalls setzen wir  $Y$  zusätzlich als wegzusammenhängend voraus. Daher existiert zu jedem  $y \in Y$  ein Weg  $\gamma$  in  $Y$ , der  $y_0$  und  $y$  verbindet. Dann ist  $f \circ \gamma$  ein Weg in

$Y$  mit Anfangspunkt  $f(y_0) = \pi(\hat{x}_0)$ . Mit Proposition B.2 und der darauffolgenden 1. Bemerkung hat  $f \circ \gamma$  einen gelifteten Weg  $\hat{\gamma}$  in  $\hat{X}$  mit Anfangspunkt  $\hat{x}_0$  und  $\pi \circ \hat{\gamma} = f \circ \gamma$ . Wir definieren  $\hat{f}(y) \in \hat{X}$  als den Endpunkt von  $\hat{\gamma}$ . Klarerweise gilt  $\pi(\hat{f}(y)) = f(y)$ .

Zwar ist der Lift  $\hat{\gamma}$  und damit sein Endpunkt eindeutig, aber zur Wohldefiniertheit von  $\hat{f}$  betrachten wir einen weiteren Weg  $\sigma$  in  $Y$ , der  $y_0$  und  $y$  verbindet, und dessen Lift  $\hat{\sigma}$  in  $\hat{X}$  mit Anfangspunkt  $\hat{x}_0$  und  $\pi \circ \hat{\sigma} = f \circ \sigma$ . Da  $\gamma$  und  $\sigma$  und andererseits  $\hat{\gamma}$  und  $\hat{\sigma}$  gleiche Anfangspunkte haben, sind  $(-\gamma) \oplus \sigma$  bzw.  $(-\hat{\gamma}) \oplus \hat{\sigma}$  Wege in  $Y$  bzw.  $\hat{X}$ , die die Endpunkte von  $\gamma$  und von  $\sigma$  bzw. die Endpunkte von  $\hat{\gamma}$  und von  $\hat{\sigma}$  verbinden. Da  $y$  der Endpunkt von  $\gamma$  und  $\sigma$  ist, ist  $(-\gamma) \oplus \sigma$  ein geschlossener Weg. Klarerweise gilt

$$\pi \circ ((-\hat{\gamma}) \oplus \hat{\sigma}) = f \circ ((-\gamma) \oplus \sigma),$$

und somit ist  $\pi \circ ((-\hat{\gamma}) \oplus \hat{\sigma})$  ein geschlossener Weg in  $X$ . Da  $Y$  einfach zusammenhängend ist, ist der geschlossene Weg  $(-\gamma) \oplus \sigma$  in  $Y$  null-homotop, also ist auch  $f \circ ((-\gamma) \oplus \sigma) = \pi \circ ((-\hat{\gamma}) \oplus \hat{\sigma})$  null-homotop in  $X$ . Mit der 1. Bemerkung nach Proposition B.2 wird der null-homotope Weg  $\pi \circ ((-\hat{\gamma}) \oplus \hat{\sigma})$  in einen geschlossenen Weg geliftet. Offensichtlich ist dieser Lift  $(-\hat{\gamma}) \oplus \hat{\sigma}$ , also ist  $(-\hat{\gamma}) \oplus \hat{\sigma}$  ein geschlossener Weg, damit haben  $\hat{\gamma}$  und  $\hat{\sigma}$  den gleichen Endpunkt, und  $\hat{f}$  ist wohldefiniert.

Da wir  $\pi \circ \hat{f} = f$  bereits haben, verbleibt noch die Stetigkeit von  $\hat{f}$  zu zeigen. Für  $y \in Y, \hat{x} := \hat{f}(y) \in \hat{X}$  und  $x := \pi(\hat{x}) = f(y) \in X$ , wählen wir eine offene Umgebung  $U(x)$  von  $x$ , für die  $\pi^{-1}(U(x)) = \sum_k V_k, V_k$  offen und  $\pi|_{V_k} \xrightarrow{\sim} U(x)$  ein Homöomorphismus wie in Definition B.1 ist. Da  $\hat{x} \in \pi^{-1}(U(x)) = \sum_k V_k$ , liegt  $\hat{x}$  in einem  $V_k$ . Da  $Y$  lokal wegzusammenhängend ist, können wir eine offene Umgebung  $W(y)$  von  $y$  wählen, die wegzusammenhängend ist und für die  $f(W(y)) \subseteq U(x)$ , da  $f$  stetig ist. Nun verbinden wir  $y$  mit einem beliebigen Punkt  $z \in W(y)$  durch einen Weg  $\omega$  in  $W(y)$ . Da  $f(W(y)) \subseteq U(x)$  und  $\pi|_{V_k} \xrightarrow{\sim} U(x)$  ein Homöomorphismus ist, ist der Lift von  $\omega$  mit Anfangspunkt  $\hat{x} \in \pi^{-1}(x)$  gegeben durch  $(\pi|_{V_k})^{-1} \circ \omega$ . Nun verbindet der Weg  $\omega \oplus \gamma$  die Punkte  $y_0$  und  $z$  in  $Y$  und  $((\pi|_{V_k})^{-1} \circ \omega) \oplus \hat{\gamma}$  ist sein Lift mit Anfangspunkt  $x_0$ . Nach Definition von  $\hat{f}$  ist  $\hat{f}(z)$  der Endpunkt von  $(\pi|_{V_k})^{-1} \circ \omega$ , also  $\hat{f}(y) \in V_k$  und  $\hat{f}(W(y)) \subseteq V_k$ . Durch Verkleinern von  $V_k$  und  $U(x)$  erhalten wir die Stetigkeit von  $\hat{f}$ .

Die Eindeutigkeit von  $\hat{f}$  folgt aus Proposition B.1, da  $Y$  zusammenhängend ist. Damit ist die Proposition bewiesen.

///

### Bemerkung:

Ist  $f : Y \rightarrow X$  auch eine Überlagerungsprojektion und  $\hat{X}$  zusammenhängend, so ist mit  $Y$  auch  $X$  und damit  $\hat{X}$  lokal wegzusammenhängend, und  $\hat{X}$  ist wegzusammenhängend. Somit gibt es zu jedem  $\hat{x} \in \hat{X}$  einen Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \hat{X}$  mit  $\gamma(0) = \hat{x}_0, \gamma(1) = \hat{x}$ , und  $\gamma := \pi \circ \hat{\gamma}$  ist ein Weg in  $X$  mit Anfangspunkt  $\gamma(0) = \pi(\hat{x}_0) = f(y_0)$ . Da  $f : Y \rightarrow X$  eine Überlagerungsprojektion ist, existiert mit der 1. Bemerkung nach Proposition B.2 ein Lift  $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow Y$  von  $\gamma$ , d.h.  $f \circ \gamma_0 = \gamma$ , mit  $\gamma_0(0) = y_0$ . Dann ist  $\hat{f} \circ \gamma_0$  ein Weg in  $\hat{X}$  mit Anfangspunkt  $(\hat{f} \circ \gamma_0)(0) = \hat{f}(y_0) = \hat{x}_0 = \hat{\gamma}(0)$  und  $\pi \circ \hat{f} \circ \gamma_0 = f \circ \gamma_0 = \gamma = \pi \circ \hat{\gamma}$ . Also sind  $\hat{f} \circ \gamma_0$  und  $\hat{\gamma}$  zwei Lifts von  $\gamma$  mit dem gleichen Anfangspunkt, und mit der Eindeutigkeit der Lifts in der 1. Bemerkung nach Proposition B.2 bzw. Proposition B.1 folgt  $\hat{f} \circ \gamma_0 = \hat{\gamma}$ . Dies ergibt  $\hat{f}(\gamma_0(1)) = \hat{\gamma}(1) = \hat{x}$ , und  $\hat{f} : Y \rightarrow \hat{X}$  ist surjektiv.

Wir setzen  $x = \pi(\hat{x}) \in X$ , und es existiert eine offene Umgebung  $U(x)$  von  $x$ , für die  $\pi^{-1}(U(x)) = \sum_l V_l, V_l \subseteq \hat{X}$  offen und  $\pi|_{V_l} \xrightarrow{\sim} U(x)$  ein Homöomorphismus ist und

für die  $f^{-1}(U(x)) = \sum_k W_k$ ,  $W_k \subseteq Y$  offen und  $f|_{W_k} \xrightarrow{\sim} U(x)$  ein Homöomorphismus ist. Da  $\hat{X}$  und somit  $X$  lokal wegzusammenhängend ist, können wir  $U(x)$  wegzusammenhängend wählen. Damit sind alle  $V_l \subseteq \hat{X}$  und  $W_k \subseteq Y$  auch wegzusammenhängend, und, da  $V_l$  bzw.  $W_k$  offen und paarweise disjunkt sind, sind  $V_l$  bzw.  $W_k$  die Wegzusammenhangskomponenten von  $\pi^{-1}(U(x))$  bzw.  $f^{-1}(U(x))$ . Nun gilt mit dem Lift

$$\hat{f}(W_k) \subseteq \pi^{-1}(f(W_k)) = \pi^{-1}(U(x)) = \sum_l V_l,$$

und, da  $\hat{f}(W_k)$  wegzusammenhängend ist, ist  $\hat{f}(W_k)$  in genau einer Wegzusammenhangskomponente  $V_{l_k}$  enthalten. Mit den obigen Homöomorphismen ist  $\hat{f}|_{W_k} \xrightarrow{\sim} V_{l_k}$  ein Homöomorphismus. Da  $\hat{x} \in \pi^{-1}(U(x)) = \sum_l V_l$ , ist  $\hat{x} \in V_l$  für genau ein  $l$ , und  $\hat{f}^{-1}(V_l) = \sum_{k, l_k=l} W_k$ . Damit ist  $\hat{f} : Y \rightarrow \hat{X}$  eine Überlagerungsprojektion. □

**Definition B.2** Für eine Überlagerungsprojektion  $\pi : \hat{X} \rightarrow X$  heißen Homöomorphismen  $\tau : \hat{X} \xrightarrow{\sim} \hat{X}$  mit  $\pi \circ \tau = \pi$  die Decktransformationen von  $\pi$ . □

**Proposition B.4** Es sei  $\pi : \hat{X} \rightarrow X$  eine Überlagerungsprojektion und  $\hat{X}$  zusammenhängend. Dann bilden die Decktransformationen von  $\pi$  eine Gruppe von Homöomorphismen von  $\hat{X}$ , die frei diskontinuierlich auf  $\hat{X}$  operiert, d.h. zu jedem  $\hat{x}$  existiert eine offene Umgebung  $U(\hat{x})$  von  $\hat{x}$ , so dass für eine Decktransformation  $\tau$  mit

$$\tau(U(\hat{x})) \cap U(\hat{x}) \neq \emptyset \Rightarrow \tau = id_{\hat{X}}.$$

Ist  $\hat{X}$  einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, so operieren die Decktransformationen transitiv auf jeder Faser von  $\pi$ , d.h. zu jedem  $x \in X$  und  $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in \pi^{-1}(x)$  existiert eine Decktransformation  $\tau$  von  $\pi$  mit  $\hat{x}_2 = \tau(\hat{x}_1)$ , und weiter ist diese Decktransformation eindeutig.

#### Beweis:

Klarerweise ist die Verkettung und die Inverse von Decktransformationen wieder eine Decktransformation, und somit bilden die Decktransformationen eine Gruppe.

Für  $\hat{x} \in \hat{X}$  betrachten wir für  $x := \pi(\hat{x})$  eine offene Umgebung  $U(x)$  von  $x$ , für die  $\pi^{-1}(U(x)) = \sum_k V_k$ ,  $V_k$  offen und  $\pi|_{V_k} \xrightarrow{\sim} U(x)$  ein Homöomorphismus wie in Definition B.1 ist. Da  $\hat{x} \in \pi^{-1}(U(x)) = \sum_k V_k$ , liegt  $\hat{x}$  in genau einem  $V_k$ , und wir setzen  $U(\hat{x}) := V_k$ . Angenommen  $\hat{y} \in \tau(U(\hat{x})) \cap U(\hat{x}) \neq \emptyset$ , so existiert  $\hat{z} \in U(\hat{x})$  mit  $\hat{y} = \tau(\hat{z})$ . Da  $\pi(\hat{y}) = \pi(\tau(\hat{z})) = \pi(\hat{z})$ ,  $\hat{y}, \hat{z} \in U(\hat{x}) = V_k$  und  $\pi|_{V_k}$  injektiv ist, folgt  $\hat{z} = \hat{y} = \tau(\hat{z})$ , und  $\hat{z}$  ist ein Fixpunkt von  $\tau$ . Nun gilt  $\pi \circ \tau = \pi = \pi \circ id_{\hat{X}}$ ,  $\tau(\hat{z}) = \hat{z} = id_{\hat{X}}(\hat{z})$  und  $\hat{X}$  ist zusammenhängend, und mit Proposition B.1 folgt  $\tau = id_{\hat{X}}$ , und die Decktransformationen operieren frei diskontinuierlich auf  $\hat{X}$ .

Für  $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in \pi^{-1}(x)$ ,  $x \in X$ , haben wir  $\pi(\hat{x}_2) = x = \pi(\hat{x}_1)$ . Ist  $\hat{X}$  einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, so existieren mit Proposition B.3 eindeutige Lifts  $\tau, \tilde{\tau}$  von  $\pi : Y = \hat{X} \rightarrow X$ , d.h.  $\pi \circ \tau = \pi = \pi \circ \tilde{\tau}$ , mit  $\tau(\hat{x}_1) = \hat{x}_2$  und  $\tilde{\tau}(\hat{x}_2) = \hat{x}_1$ . Dann gilt  $\pi \circ (\tilde{\tau} \circ \tau) = \pi$ ,  $(\tilde{\tau} \circ \tau)(\hat{x}_1) = \hat{x}_1$  und  $\hat{X}$  ist zusammenhängend, und mit Proposition B.1 folgt  $\tilde{\tau} \circ \tau = id_{\hat{X}}$  und mit Symmetrie  $\tau \circ \tilde{\tau} = id_{\hat{X}}$ . Damit ist  $\tau$

ein Homöomorphismus, also eine Decktransformation, und  $\tau$  erfüllt  $\tau(\hat{x}_1) = \hat{x}_2$ , wie gewünscht. Die Eindeutigkeit von  $\tau$  folgt aus Proposition B.3 mit der Eindeutigkeit von  $\tau$  als Lift.

///

### Bemerkungen:

1. Ist  $\pi : \hat{X} \rightarrow X$  eine einfach zusammenhängende, lokal wegzusammenhängende Überlagerung und  $\tau : \hat{X} \rightarrow \hat{X}$  ein Lift von  $\pi$ , d.h.  $\pi \circ \tau = \pi$ , so gilt für  $\hat{X}, X \neq \emptyset$  und beliebiges  $\hat{x}_1 \in \hat{X}$  und  $\hat{x}_2 := \tau(\hat{x}_1)$ , dass  $\pi(\hat{x}_1) = \pi(\hat{x}_2)$ . Mit der obigen Proposition B.4 existiert eine Decktransformation  $\tau_0 : \hat{X} \xrightarrow{\sim} \hat{X}$  mit  $\pi \circ \tau_0 = \pi$  und  $\tau_0(\hat{x}_1) = \hat{x}_2$ , also, da  $\hat{X}$  zusammenhängend ist, ist  $\tau = \tau_0$  mit Proposition B.1 eine Decktransformation, insbesondere ein Homöomorphismus.
2. Sind  $\pi_j : \hat{X} \rightarrow X_j$  zwei einfach zusammenhängende, lokal wegzusammenhängende Überlagerungsprojektionen mit den gleichen Decktransformationen, so existiert, da die Decktransformationen der  $\pi_j$  mit obiger Proposition B.4 transitiv auf der Faser von  $\pi_j$  operieren und  $\pi_j$  surjektiv sind, eine bijektive Abbildung  $f : X_1 \rightarrow X_2$  mit  $f \circ \pi_1 = \pi_2$ . Da  $\pi_1, \pi_2$  als Überlagerungsprojektionen lokale Homöomorphismen sind, ist  $f = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$  ein lokaler Homöomorphismus, und, da  $f$  bijektiv ist, ist  $f : X_1 \xrightarrow{\sim} X_2$  ein Homöomorphismus.

□

**Proposition B.5 ([Sp] Corollary 2.5.14)** *Jeder zusammenhängende, lokal wegzusammenhängende, semi-lokal einfach zusammenhängende, topologische Raum  $X$ , d.h. zu jedem  $x \in X$  existiert eine offene Umgebung  $U(x)$  von  $x$ , so dass alle geschlossenen Wege in  $U(x)$  null-homotop in  $X$  sind, hat eine einfach zusammenhängende Überlagerung.*

□

### Beweis:

Wir wählen  $x_0 \in X$  und setzen  $\hat{X}$  als die Menge der Äquivalenzklassen aller homotoper Wege in  $X$  mit Anfangspunkt  $x_0$ . Die Äquivalenzklasse, in der ein solcher Weg  $\gamma$  liegt, bezeichnen wir mit  $\langle \gamma \rangle$ . Da homotope Wege den gleichen Endpunkt haben, ist die Projektion  $\pi : \hat{X} \rightarrow X$  auf den gemeinsamen Endpunkt einer Äquivalenzklasse wohldefiniert. Da  $X$  zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist, ist  $\hat{X}$  wegzusammenhängend, und  $\pi$  ist surjektiv.

Wir betrachten die Paare  $(\gamma, U)$  mit  $U \subseteq X$  offen und  $\gamma$  ein Weg in  $X$  mit Anfangspunkt  $x_0$  und Endpunkt in  $U$ . Mit  $\langle \gamma, U \rangle$  bezeichnen wir die Menge der Äquivalenzklassen in  $\hat{X}$ , die einen Repräsentanten der Form  $\gamma \oplus \sigma$  für einen beliebigen Weg  $\sigma$  in  $U$  mit dem Endpunkt von  $\gamma$  als Anfangspunkt haben.

Für  $\langle \omega \rangle \in \langle \gamma, U \rangle$  gibt es einen Weg  $\sigma$  in  $U$  mit dem Endpunkt von  $\gamma$  als Anfangspunkt und  $\omega$  ist homotop zu  $\gamma \oplus \sigma$ . Für einen beliebigen Weg  $\sigma'$  in  $U$  mit dem Endpunkt von  $\omega$  bzw.  $\sigma$  als Anfangspunkt haben wir die homotopen Wege

$$\omega \oplus \sigma' \simeq (\gamma \oplus \sigma) \oplus \sigma' \simeq \gamma \oplus (\sigma \oplus \sigma')$$

und  $\sigma \oplus \sigma'$  ist ein Weg in  $U$  mit dem Endpunkt von  $\gamma$  als Anfangspunkt, also  $\langle \omega \oplus \sigma' \rangle \in \langle \gamma, U \rangle$  und

$$\langle \omega, U \rangle \subseteq \langle \gamma, U \rangle.$$

Da andererseits  $\gamma \simeq \gamma \oplus \sigma \oplus (-\sigma) \simeq \omega \oplus (-\sigma)$ , also  $\langle \gamma \rangle \in \langle \omega, U \rangle$ , folgt mit Symmetrie

$$\langle \omega, U \rangle = \langle \gamma, U \rangle \quad \forall \langle \omega \rangle \in \langle \gamma, U \rangle. \quad (\text{B.2})$$

Ist nun  $\langle \omega \rangle \in \langle \gamma, U \rangle \cap \langle \gamma', U' \rangle$ , so folgt  $\pi(\langle \omega \rangle) \in U \cap U' \neq \emptyset$  und

$$\langle \omega \rangle \in \langle \omega, U \cap U' \rangle \subseteq \langle \omega, U \rangle \cap \langle \omega, U' \rangle = \langle \gamma, U \rangle \cap \langle \gamma', U' \rangle$$

Damit bilden  $\{\langle \gamma, U \rangle\}$  die Basis einer Topologie, und wir betrachten  $\hat{X}$  als topologischen Raum mit dieser Topologie. Damit offensichtlich  $\pi(\langle \gamma, U \rangle) \subseteq U$ , ist  $\pi : \hat{X} \rightarrow X$  stetig. Für wegzusammenhängendes  $U$  haben wir  $\pi(\langle \gamma, U \rangle) = U$ , also ist, da  $X$  lokal wegzusammenhängend ist,  $\pi : \hat{X} \rightarrow X$  eine offene Abbildung.

Sind alle geschlossenen Wege in  $U$  null-homotop in  $X$ , so ist für zwei Wege  $\sigma, \sigma'$  in  $U$  mit dem Endpunkt von  $\gamma$  als Anfangspunkt und gleichem Endpunkt der Weg  $(-\sigma') \oplus \sigma$  als geschlossener Weg in  $U$  null-homotop in  $X$ , also  $\sigma \simeq \sigma' \oplus ((-\sigma') \oplus \sigma) \simeq \sigma'$  und  $\langle \gamma \oplus \sigma \rangle = \langle \gamma \oplus \sigma' \rangle$ , und  $\pi|_{\langle \gamma, U \rangle}$  ist injektiv. Ist  $U$  weiter wegzusammenhängend, so ist  $\pi|_{\langle \gamma, U \rangle} \rightarrow U$  bijektiv, und, da  $\pi$  offen und stetig ist, ist  $\pi|_{\langle \gamma, U \rangle} \xrightarrow{\sim} U$  ein Homöomorphismus. Da  $X$  lokal wegzusammenhängend und semi-lokal einfach zusammenhängend ist, existiert zu jedem  $x \in X$  eine offene, wegzusammenhängende Umgebung  $U(x)$  von  $x$ , so dass alle geschlossenen Wege in  $U(x)$  null-homotop in  $X$  sind. Klarerweise ist

$$\pi^{-1}(U(x)) = \cup_{\pi(\langle \gamma \rangle) \in U} \langle \gamma, U \rangle,$$

und  $\langle \gamma, U \rangle$  sind offen, mit (B.2) sind  $\langle \gamma, U \rangle$  paarweise disjunkt und  $\pi|_{\langle \gamma, U \rangle} \xrightarrow{\sim} U$  ist ein Homöomorphismus. Zusammen ist  $\pi : \hat{X} \rightarrow X$  eine Überlagerungsprojektion.

Schliesslich sei  $\gamma_0$  der konstante Weg bei  $x_0$  und  $\hat{x}_0 := \langle \gamma_0 \rangle \in \hat{X}$ . Für  $\langle \gamma \rangle \in \hat{X}$  beliebig, z.B.  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  mit Anfangspunkt  $x_0$ , betrachten wir für  $t \in [0, 1]$  die Wege  $\gamma_t : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma_t(s) := \gamma(st)$ , insbesondere  $\gamma_0 \equiv x_0$  im Einklang mit der obigen Definition. Wir setzen  $\hat{\gamma}(t) := \langle \gamma_t \rangle \in \hat{X}$ , insbesondere  $\hat{\gamma}(1) = \langle \gamma \rangle$ . Für  $\hat{\gamma}(t) = \langle \gamma_t \rangle$  enthalten in einer Basismenge  $\langle \omega, U \rangle$  von  $\hat{X}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , sehen wir  $\gamma(t) = \gamma_t(1) = \pi(\langle \gamma_t \rangle) \in U$ . Da  $\gamma$  stetig und  $U \subseteq X$  offen ist, existiert ein  $\delta > 0$  mit  $\gamma(s) \in U$  für alle  $s \in [t - \delta, t + \delta] \cap [0, 1]$ . Damit sind  $\gamma_{t,s}(\tau) := \gamma((1 - \tau)t + \tau s)$ ,  $\tau \in [0, 1]$ , für solche  $s$  ganz in  $U$  enthalten, und, da

$$\gamma_s \simeq (\gamma_s \oplus (-\gamma_{t,s})) \oplus \gamma_{t,s} \simeq \gamma_t \oplus \gamma_{t,s},$$

sehen wir mit (B.2), dass  $\hat{\gamma}(s) = \langle \gamma_s \rangle \in \langle \gamma_t, U \rangle = \langle \omega, U \rangle$ , und ist  $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \hat{X}$  stetig. Da  $\hat{\gamma}(0) = \langle \gamma_0 \rangle = \hat{x}_0$ ,  $\hat{\gamma}(1) = \langle \gamma \rangle$ , ist  $\hat{\gamma}$  ein Weg in  $\hat{X}$ , der  $\hat{x}_0$  und  $\langle \gamma \rangle$  verbindet, und  $\hat{X}$  ist wegzusammenhängend. Da weiter

$$\pi(\hat{\gamma}(t)) = \pi(\langle \gamma_t \rangle) = \gamma_t(1) = \gamma(t),$$

also  $\pi \circ \hat{\gamma} = \gamma$ , ist  $\hat{\gamma}$  der Lift von  $\gamma$  mit Anfangspunkt  $\hat{x}_0$ .

Nun sei  $\hat{\omega} : [0, 1] \rightarrow \hat{X}$  ein beliebiger geschlossener Weg bei  $\hat{x}_0$ , also  $\hat{\omega}(0) = \hat{x}_0 = \hat{\omega}(1)$ . Dann ist  $\gamma := \pi \circ \hat{\omega}$  ein geschlossener Weg in  $X$  bei  $\pi(\hat{x}_0) = x_0$ . Setzen wir  $\hat{\gamma} = \langle \gamma_t \rangle$  wie oben, so sind  $\hat{\gamma}$  und  $\hat{\omega}$  Lifts von  $\gamma$  mit Anfangspunkt  $\hat{x}_0$ . Da dieser Lift

mit Proposition B.1 eindeutig ist, da  $\pi : \hat{X} \rightarrow X$  eine Überlagerungsprojektion ist, haben wir  $\hat{\gamma} = \hat{\omega}$ , insbesondere

$$\langle \gamma \rangle = \hat{\gamma}(1) = \hat{\omega}(1) = \hat{x}_0 = \langle \gamma_0 \rangle,$$

und  $\gamma \simeq \gamma_0$  ist null-homotop in  $X$ . Mit der 2. Bemerkung nach Proposition B.2 werden die homotopen Wege  $\gamma$  und  $\gamma_0$  in homotope Wege geliftet, also sind die Lifte  $\hat{\omega} = \hat{\gamma}$  und der konstante Weg  $\hat{\gamma}_0$  homotop in  $\hat{X}$ , und  $\hat{\omega}$  ist null-homotop in  $\hat{X}$ . Da  $\hat{\omega}$  beliebig war und  $\hat{X}$  wegzusammenhängend ist, ist  $\hat{X}$  einfach zusammenhängend, und die Proposition ist bewiesen.

///

### Bemerkungen:

1. Hat ein topologischer Raum  $X$  eine einfach zusammenhängende Überlagerung  $\pi : \hat{X} \rightarrow X$ , so ist zuerst mit der Surjektivität von  $\pi$  und dem Zusammenhang von  $\hat{X}$  auch  $X$  zusammenhängend. Ist  $U \subseteq X$  offen,  $\pi^{-1}(U) = \sum_k V_k$ ,  $V_k$  offen und  $\pi|_{V_k} \xrightarrow{\sim} U$  ein Homöomorphismus wie in Definition B.1, so ist jeder Lift eines geschlossenen Weges  $\gamma$  in  $U$  gegeben durch  $\hat{\gamma} := (\pi|_{V_k})^{-1} \circ \gamma$ . Da  $\hat{X}$  einfach zusammenhängend ist, ist  $\hat{\gamma}$  null-homotop in  $\hat{X}$ , also ist auch  $\gamma = \pi \circ \hat{\gamma}$  null-homotop in  $X$ , und wir sehen, dass  $X$  notwendigerweise semi-lokal einfach zusammenhängend ist.

2. Eine Überlagerungsprojektion  $\pi : \hat{X} \rightarrow X$  heisst universelle Überlagerung, wenn  $\hat{X}$  zusammenhängend ist und  $\pi$  für jede weitere Überlagerungsprojektion  $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow X$  geliftet werden kann, d.h. es existiert ein stetiges  $f : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$  mit  $\tilde{\pi} \circ f = \pi$ .

Ist  $X$  lokal wegzusammenhängend, so ist auch  $\hat{X}$  lokal wegzusammenhängend, da  $\hat{X}$  und  $X$  lokal homöomorph sind, und mit Proposition B.3 sind einfach zusammenhängende Überlagerungen immer universell.

3. Ist  $\pi : \hat{X} \rightarrow X$  eine einfach zusammenhängende Überlagerung und  $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow X$  eine nach voriger Bemerkung universelle Überlagerung eines lokal wegzusammenhängenden topologischen Raumes  $X$ , so ist, wie schon bemerkt, auch  $\pi$  eine universelle Überlagerung. Da  $\tilde{\pi}$  universell ist, existiert zuerst ein stetiges  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$  mit  $\pi \circ \tilde{f} = \tilde{\pi}$ .

Für  $X \neq \emptyset$  und beliebiges  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  und  $\hat{x} := \tilde{f}(\tilde{x}) \in \hat{X}$ , haben wir  $\pi(\hat{x}) = (\pi \circ \tilde{f})(\tilde{x}) = \tilde{\pi}(\tilde{x})$ , und, da wieder  $\hat{X}$  lokal wegzusammenhängend ist, da  $\hat{X}$  und  $X$  lokal homöomorph sind, existiert mit Proposition B.3 ein Lift  $f : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$  mit  $\tilde{\pi} \circ f = \pi$  und  $f(\hat{x}) = \tilde{x}$ . Dann gilt  $\pi \circ (\tilde{f} \circ f) = \pi, \tilde{\pi} \circ (f \circ \tilde{f}) = \tilde{\pi}$  und  $(\tilde{f} \circ f)(\hat{x}) = \hat{x}, (f \circ \tilde{f})(\tilde{x}) = \tilde{x}$ , also  $\tilde{f} \circ f = id_{\hat{X}}, f \circ \tilde{f} = id_{\tilde{X}}$  mit Proposition B.1. Damit sind  $\tilde{f} : \hat{X} \xrightarrow{\sim} \tilde{X}, f : \tilde{X} \xrightarrow{\sim} \hat{X}$  Homöomorphismen, und die Überlagerungen  $\pi$  und  $\tilde{\pi}$  sind äquivalent, insbesondere ist  $\tilde{X}$  auch einfach zusammenhängend.

4. Da Mannigfaltigkeiten in jedem Punkt eine Umgebungsbasis aus offenen, einfach zusammenhängenden Mengen hat, besitzt mit Proposition B.5 jede Mannigfaltigkeit eine einfach zusammenhängende Überlagerung.

5. Für einen lokalen Homöomorphismus  $\pi : \hat{X} \rightarrow M$  von einem topologischen Raum  $\hat{X}$  in eine Riemannsche Fläche  $M$ , d.h. zu jedem  $x$  existiert eine offene Umgebung  $U(x) \subseteq \hat{X}$  von  $x$  mit  $\pi|_{U(x)} \xrightarrow{\sim} \pi(U(x))$  ist ein Homöomorphismus und  $\pi(U(x)) \subseteq M$  ist offen, bilden wie in der 5. Bemerkung nach Definition 2.2 für jede offene Menge  $U \subseteq \hat{X}$  mit  $\pi|_U \xrightarrow{\sim} \pi(U)$  ist ein Homöomorphismus und jede Karte  $z : V \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\pi(U) \subseteq V$  die Karten  $z \circ \pi|_U \xrightarrow{\sim} z(\pi(U)) \subseteq \mathbb{C}$  einen komplexen Atlas von  $\hat{X}$ .

Ist  $\pi$  eine Überlagerungsprojektion, so ist  $\hat{X}$  nicht-leer und ein Hausdorff-Raum, da  $M$  als Riemannsche Fläche nicht-leer und ein Hausdorff-Raum ist und  $\pi$  surjektiv ist. Mit der folgenden Bemerkung erfüllt  $\hat{X}$  auch das zweite Abzählbarkeitsaxiom, und so wird  $\hat{X}$  durch diesen Atlas zu einer Riemannschen Fläche, und  $\pi : \hat{X} \rightarrow M$  ist holomorph.

6. Ist  $\pi : \hat{X} \rightarrow X$  eine Überlagerungsprojektion, erfüllt  $X$  das zweite Abzählbarkeitsaxiom und ist  $X$  lokal zusammenhängend und  $\hat{X}$  zusammenhängend, so erfüllt auch  $\hat{X}$  das zweite Abzählbarkeitsaxiom, denn in diesem Fall können wir eine abzählbare offene Überdeckung  $U_n, n \in \mathbb{N}$ , von  $X$  aus zusammenhängenden Mengen  $U_n$  mit  $\pi^{-1}(U_n) = \sum_{k \in I_n} V_{n,k}, V_{n,k}$  ist offen und  $\pi|_{V_{n,k}} \xrightarrow{\sim} U_n$  ist ein Homöomorphismus wie in Definition B.1 wählen. Klarerweise ist  $\{V_{n,k}\}_{n,k}$  eine offene Überdeckung von  $\hat{X}$ .

Wir zeigen,  $V_{n,k}$  schneidet sich mit nur abzählbar vielen  $V_{m,l}$ . Dazu sei  $\hat{x} \in V_{n,k} \cap \pi^{-1}(U_m)$  und  $x := \pi(\hat{x}) \in U_n \cap U_m \subseteq X$ . Da  $X$  lokal zusammenhängend ist, existiert eine offene, zusammenhängende Umgebung  $U(x) \subseteq U_n \cap U_m$  von  $x$ . Dann gilt  $\pi^{-1}(U(x)) = \pi^{-1}(U(x)) \cap \sum_{k' \in I_n} V_{n,k'} = \sum_{k' \in I_n} (\pi^{-1}(U(x)) \cap V_{n,k'})$  und  $\pi^{-1}(U(x)) \cap V_{n,k'}$  sind offen und  $\pi|_{(\pi^{-1}(U(x)) \cap V_{n,k'})} \xrightarrow{\sim} U(x)$  ist ein Homöomorphismus.

Damit ist  $\hat{x} \in \pi^{-1}(U(x)) \cap V_{n,k} \cong U(x)$  zusammenhängend und  $\pi^{-1}(U(x)) \cap V_{n,k} \subseteq \pi^{-1}(U_m)$  ist in einer Zusammenhangskomponente von  $\pi^{-1}(U_m)$  enthalten. Mit der 2. Bemerkung nach Definition B.1 sind diese Zusammenhangskomponenten gerade  $V_{m,l}, l \in I_m$ , also  $\pi^{-1}(U(x)) \cap V_{n,k} \subseteq V_{m,l}$  für ein  $l \in I_m$ . Da  $V_{m,l'}$  paarweise disjunkt sind, folgt  $\pi^{-1}(U(x)) \cap V_{n,k} \cap V_{m,l'} = \emptyset$  für  $l' \neq l$ .

Wir haben gezeigt, für jedes  $\hat{x} \in V_{n,k} \cap \pi^{-1}(U_m)$  existiert eine offene Umgebung  $\pi^{-1}(U(x))$  von  $\hat{x}$ , so dass sich  $V_{n,k}$  in  $\pi^{-1}(U(x))$  mit nur einem  $V_{m,l}, l \in I_m$  schneidet. Da  $X$  das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und  $V_{n,k} \cong U_n \subseteq X$ , können wir  $V_{n,k} \cap \pi^{-1}(U_m)$  mit abzählbar vielen solchen offenen Umgebungen überdecken, und somit gibt es für jedes  $m \in \mathbb{N}$  nur abzählbar viele  $l \in I_m$  mit  $V_{n,k} \cap V_{m,l} \neq \emptyset$ . Da nur abzählbar viele  $m \in \mathbb{N}$ , schneidet sich  $V_{n,k}$  mit nur abzählbar vielen  $V_{m,l}$ .

Nun ist  $\hat{X}$  zusammenhängend und alle  $V_{n,k}$  offen, und daher lassen sich alle  $V_{m,l}$  mit  $V_{n,k}$  durch eine Kette  $V_{n_1,k_1}, \dots, V_{n_J,k_J}$  mit  $(n_1, k_1) = (n, k), (n_J, k_J) = (m, l)$  und

$$V_{n_{j-1},k_{j-1}} \cap V_{n_j,k_j} \neq \emptyset \quad \text{für } j = 1, \dots, J$$

verbinden. Da sich aber alle  $V_{n,k}$  mit nur abzählbar vielen  $V_{m,l}$  schneiden, enthalten alle Ketten mit gegebenem Anfangsglied nur abzählbar viele verschiedene Glieder,

und wir schliessen, es gibt nur abzählbar viele  $V_{n,k}$ , insbesondere sind alle  $I_n$  abzählbar, da  $V_{n,k}, k \in I_n$ , paarweise disjunkt, also verschieden sind.

Da  $\pi|_{V_{n,k}} \xrightarrow{\sim} U_n$  ein Homöomorphismus ist und  $X$  das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, hat jedes  $V_{n,k}$  eine abzählbare Basis. Da  $V_{n,k}$  eine offene Überdeckung von  $\hat{X}$  bilden, ist die Vereinigung dieser Basen eine abzählbare Basis von  $\hat{X}$ , und  $\hat{X}$  erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

7. Ist  $\pi : \hat{X} \rightarrow X$  eine Überlagerungsprojektion von Riemannschen Flächen  $\hat{X}$  und  $X$  und ist  $\pi$  holomorph, so heisst  $\pi$  eine holomorphe Überlagerungsprojektion bzw.  $\hat{X}$  eine holomorphe Überlagerung von  $X$ . Für holomorphe Überlagerung sind Lifts holomorpher Abbildungen wieder holomorph, insbesondere sind die Decktransformation von  $\pi$  biholomorph.

8. Mit der 4. Bemerkung hat jede Riemannsche Fläche eine einfach zusammenhängende und damit universelle, holomorphe Überlagerung. Diese ist bis auf Biholomorphie eindeutig, und mit dem Uniformisierungssatz, Satz 9.1, ist diese bis auf Biholomorphie  $S^2, \mathbb{C}$  oder  $D$ .

Umgekehrt ist mit der 3. Bemerkung jede universelle Überlagerung einer Riemannschen Fläche einfach zusammenhängend.

9. Sind  $\pi_j : \hat{M} \rightarrow M_j$  zwei universelle, holomorphe Überlagerungen von Riemannschen Flächen mit den gleichen Decktransformationen, so haben wir mit der 2. Bemerkung nach Proposition B.4 einen Homöomorphismus  $f : M_1 \xrightarrow{\sim} M_2$  mit  $f \circ \pi_1 = \pi_2$ . Da  $\pi_j$  lokal biholomorph sind, ist  $f = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$  lokal biholomorph, und, da  $f$  bijektiv ist, ist  $f : M_1 \cong M_2$  eine biholomorphe Äquivalenz.

10. Die Bemerkungen 5., 7., und 9. gelten analog für differenzierbare Mannigfaltigkeiten, wenn holomorph bzw. biholomorph durch differenzierbar bzw. diffeomorph ersetzt werden.

□

**Definition B.3** Für einen nicht-leeren, wegzusammenhängenden, lokal wegzusammenhängenden topologischen Raum  $X$  mit einer einfach zusammenhängenden Überlagerung  $\pi : \hat{X} \rightarrow X$  definieren wir die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X)$  von  $X$  als die Gruppe der Decktransformationen der Überlagerungsprojektion.

□

### Bemerkungen:

1. Obige Definition der Fundamentalgruppe ist äquivalent zur Standarddefinition, siehe [Sp] §1.8 und [Sp] Theorem 2.6.2.
2. Die Fundamentalgruppe ist eine topologische Invariante, d.h. für  $X_1 \cong X_2$  homöomorph ist  $\pi_1(X_1) \cong \pi_1(X_2)$  isomorph.
3. Mit Proposition B.4 operiert die Fundamentalgruppe frei diskontinuierlich als Homöomorphismen auf  $\hat{X}$ . Für lokal wegzusammenhängendes  $X$  ist auch  $\hat{X}$

lokal wegzusammenhängend, und mit Proposition B.4 operiert die Fundamentalgruppe transitiv auf allen Fasern. Weiter hat mit der Eindeutigkeit in Proposition B.4 die Fundamentalgruppe und die Fasern der Überlagerungsprojektion  $\pi$  die gleiche Mächtigkeit, d.h.

$$|\pi_1(X)| = |\pi^{-1}(x)| \quad \forall x \in X.$$

Insbesondere ist  $X$  einfach zusammenhängend genau dann, wenn  $\pi_1(X) = \{id_X\}$ .

4. Für lokal wegzusammenhängendes  $X$  und eine zusammenhängende Überlagerung  $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow X$  sind  $\hat{X}$  und  $\tilde{X}$  wieder lokal wegzusammenhängend, insbesondere ist  $\tilde{X}$  wegzusammenhängend. Dann lifted mit Proposition B.3 und der anschliessenden Bemerkung die einfach zusammenhängenden Überlagerung  $\pi : \hat{X} \rightarrow X$  zu einer Überlagerung  $\hat{\pi} : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$  mit  $\pi = \tilde{\pi} \circ \hat{\pi}$ . Klarerweise sind alle Decktransformationen von  $\hat{\pi}$  auch Decktransformationen von  $\tilde{\pi} \circ \hat{\pi} = \pi$ , also ist  $\pi_1(\tilde{X}) \subseteq \pi_1(X)$  eine Untergruppe.
5. Da jede zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit bzw. Riemannsche Fläche  $M$  nicht-leer und wegzusammenhängend ist und nach der 4. der vorigen Bemerkungen eine einfach zusammenhängenden Überlagerung  $\pi : \hat{M} \rightarrow M$  hat, ist die Fundamentalgruppe  $\pi_1(M)$  definiert, und nach der 7. und 10. der vorigen Bemerkungen ist  $\pi_1(M)$  eine Untergruppe der Diffeomorphismengruppe bzw. der Gruppe der biholomorphen Äquivalenzen von  $\hat{M}$ , die nach Proposition B.5 frei diskontinuierlich auf  $\hat{M}$  operiert.

□

## C Die Gruppe der gebrochen linearen Abbildungen

Wie aus der Funktionentheorie bekannt ist, ist die Verkettung und die Inverse gebrochen linearer Abbildungen von  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  wieder eine gebrochen lineare Abbildung, genauer haben wir für  $GL(2, K) := \{A \in K^{2 \times 2} \mid \det A \neq 0\}$  für einen Körper  $K$  einen Gruppenhomomorphismus  $[\cdot]$  von  $GL(2, \mathbb{C})$  in die Gruppe der gebrochen linearen Abbildungen auf  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  definiert durch

$$\left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] (z) := \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Nun folgt aus  $(az + b)/(cz + d) = z$  für alle  $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  zuerst  $c = 0$  für  $z = \infty$ , dann  $b = 0$  für  $z = 0$  und schliesslich  $a/d = 1$  für  $z = 1$ , also

$$\ker[\cdot] = \{\lambda I_2 \mid \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}\}. \quad (\text{C.1})$$

Daher ist in jeder Nebenklasse des Kerns eine Matrix  $A \in GL(2, \mathbb{C})$  mit  $\det \pm A = 1$  und mit  $SL(2, K) := \{A \in K^{2 \times 2} \mid \det A = 1\}$  für einen Körper  $K$  haben wir

$$[GL(2, \mathbb{C})] = [SL(2, \mathbb{C})]. \quad (\text{C.2})$$

Die Gruppe  $Aut(M)$  der biholomorphen Äquivalenzen einer Riemannschen Fläche  $M$  bilden für  $M = S^2, D, \mathcal{H}$  gerade die gebrochen linearer Selbstabbildungen von  $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2$ , d.h.  $\Phi(M) = M$ , wie die folgende Proposition zeigt.

**Proposition C.1** *Die Gruppe der biholomorphen Äquivalenzen für  $S^2$  und die obere Halbebene  $\mathcal{H} := [Im > 0]$  sind gerade die gebrochen linearer Selbstabbildungen bzw.*

$$Aut(S^2) = [SL(2, \mathbb{C})] \quad \text{und} \quad Aut(\mathcal{H}) = [SL(2, \mathbb{R})],$$

und im zweiten Fall wird diese Gruppe durch die horizontalen Verschiebungen  $z \mapsto z + \alpha$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , die Streckungen  $z \mapsto \lambda z$  mit  $\lambda > 0$  und die negative Inversion  $z \mapsto -1/z$  erzeugt.

### Beweis:

Eine gebrochen lineare Abbildung  $\phi$  von  $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2$ , d.h.  $\phi(z) = (az + b)/(cz + d)$  für  $z \in \mathbb{C} - \{-d/c\}$ ,  $\phi(-d/c) = \infty$ ,  $\phi(\infty) = a/c$  mit  $ad - bc \neq 0$ , ist als Abbildung in  $S^2$  holomorph auf  $\mathbb{C} - \{-d/c, \infty\}$ , ist holomorph in  $-d/c$ , da  $((1/z) \circ \phi)(z) = (cz + d)/(az + b)$ , und ist holomorph in  $\infty$ , da  $(\phi \circ (1/z))(z) = (a + bz)/(c + dz)$ . Da die Inverses  $\phi^{-1}$  wieder eine gebrochen lineare Abbildung ist, also auch holomorph ist, ist  $\phi : S^2 \xrightarrow{\sim} S^2$  biholomorph, d.h.  $\phi \in Aut(S^2)$ .

Nun sei  $\phi \in Aut(S^2)$ . Nach Anwendung einer Translation und der Inversion  $1/z$  können wir  $\phi(\infty) = \infty$  annehmen. Dann ist  $\phi|_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$  eine bijektive, ganze holomorphe Funktion, und hat somit eine Darstellung als Potenzreihe  $\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  für  $z \in \mathbb{C}$ . Weiter hat  $\psi := \phi \circ (1/z)$  eine Punktsingularität in  $0$ , und mit der Injektivität von  $\phi$  haben wir  $\psi(B_1(0) - \{0\}) \cap \phi(B_1(0)) = \emptyset$ . Da  $\phi(B_1(0)) \subseteq \mathbb{C}$  offen und nicht-leer ist, ist  $\psi(B_1(0) - \{0\}) \subseteq \mathbb{C}$  nicht dicht in  $\mathbb{C}$ , und nach dem Satz von Weierstrass-Casorati hat  $\psi$  keine wesentliche Singularität in  $0$  und daher enthält seine Laurent-Reihe in  $0$

nur endlich viele negative Potenzen von  $z$ . Diese Laurent-Reihe ist aber offensichtlich  $\psi(z) = (\phi \circ (1/z))(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ , und wir schliessen, dass  $\phi$  ein Polynom ist. Da  $\phi$  injektiv ist, muss  $\phi$  genau von ersten Grad sein, d.h.  $\phi(z) = az + b$  mit  $a \neq 0$ , also ist  $\phi$  eine gebrochen lineare Abbildung, und die Aussage für  $Aut(S^2)$  ist bewiesen.

Klarerweise sind damit alle gebrochen lineare Selbstabbildungen von  $\mathcal{H}$  biholomorphe Äquivalenzen von  $\mathcal{H}$ . Andererseits sind alle biholomorphen Äquivalenzen von  $\mathcal{H}$  gebrochen lineare Selbstabbildungen, siehe [Ru] Theorem 12.6 oder [Sch-b] Proposition 3.6. Insbesondere sind die horizontalen Verschiebungen, die Streckungen und die negative Inversion biholomorphe Äquivalenzen von  $\mathcal{H}$ , und andererseits sehen wir

$$(z \mapsto z + \alpha), (z \mapsto \lambda z) = [\text{diag}(\lambda^{1/2}, \lambda^{-1/2})], (z \mapsto -1/z) \in [SL(2, \mathbb{R})]$$

für  $\alpha \in \mathbb{R}$  bzw.  $\lambda > 0$ , und es verbleibt zu zeigen, dass die Abbildungen beide Gruppen erzeugen.

Für  $\phi \in Aut(\mathcal{H})$  oder  $\phi \in [SL(2, \mathbb{R})]$  sehen wir  $\phi(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , und nach Anwendung zweier horizontaler Translationen und der negativen Inversion  $-1/z$  können wir  $\phi(0) = 0$  und  $\phi(\infty) = \infty$  annehmen. Da  $\phi$  gebrochen linear ist, haben wir  $\phi(z) = (az + b)/(cz + d)$  mit  $ad - bc = 1$  und im zweiten Fall weiter  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Wir schliessen  $b = c = 0$ , also  $\phi(z) = \lambda z$  mit  $\lambda = ad^{-1} = a^2 \neq 0$ , und, da  $\phi(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , dass  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Da im ersten Fall  $\phi(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ , schliessen wir weiter  $\lambda > 0$ , und  $\phi$  ist eine Streckung. Im zweiten Fall haben wir  $a, d \in \mathbb{R}$ , also  $\lambda = a^2 > 0$ , und  $\phi$  ist wieder eine Streckung. Damit ist die Proposition bewiesen.

///

### Bemerkung:

Mit (C.2) ist jede gebrochen lineare Abbildung  $\phi = [A]$  für ein  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  und mit (C.1) ist  $A$  bis auf das Vorzeichen eindeutig. Damit ist das Quadrat der Spur eindeutig definiert

$$\text{spur}^2[A] := (\text{spur} A)^2 \quad \text{für } A \in SL(\mathbb{C}, 2).$$

Für in  $Aut(S^2)$  konjugierte, gebrochen lineare Abbildungen  $[A], [B]$  mit  $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$ , geschrieben

$$[A] \sim [B] \implies \exists S \in SL(2, \mathbb{C}) : [A] = [S]^{-1}[B][S],$$

sehen wir

$$\text{spur}^2[A] = \text{spur}(S^{-1}BS)^2 = (\text{spur} B)^2 = \text{spur}^2[B],$$

und das Quadrat der Spur ist in jeder Konjugationsklasse invariant.

□

Genauer bestimmt das Quadrat der Spur die Konjugationsklasse.

**Proposition C.2** *Für jede gebrochen lineare Abbildung  $\phi$  gilt*

$$\phi \sim (z \mapsto z + 1) \quad \text{und} \quad \text{spur}^2 \phi = 4,$$

oder

$$\phi \sim (z \mapsto \lambda z) \quad \text{und} \quad \text{spur}^2 \phi = (\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2})^2$$

sowohl für  $\lambda$  als auch für  $\lambda^{-1}$ , und  $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$  ist bis auf sein Reziprokes eindeutig.

Weiter sind zwei gebrochen lineare Abbildungen  $\phi, \psi \neq id_{\mathbb{C} \cup \{\infty\}}$  zueinander konjugiert genau dann, wenn

$$spur^2\phi = spur^2\psi.$$

**Beweis:**

Zuerst zeigen wir, jede gebrochen lineare Abbildung hat mindestens einen Fixpunkt in  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Für  $\phi$  mit  $\phi(z) = (az + b)/(cz + d)$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0$ , haben wir für  $c = 0$ , dass  $\infty$  ein Fixpunkt von  $\phi$  ist. Für  $c \neq 0$ , ist  $z \in \mathbb{C} - \{-d/c\}$  ein Fixpunkt genau dann, wenn

$$\frac{az + b}{cz + d} = z,$$

also genau dann, wenn

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Da  $c \neq 0$ , hat diese Gleichung mindestens eine Lösung  $z_0 \in \mathbb{C}$ , und es gilt  $az_0 + b = z_0(cz_0 + d)$ . Für  $z = -d/c$  ist  $az + b \neq 0$ , da  $ad - bc \neq 0$ , also ist  $z_0 \neq -d/c$  und somit ein Fixpunkt von  $\phi$ .

Nach Konjugation können wir annehmen, dass  $\infty$  ein Fixpunkt von  $\phi$  ist. Damit folgt  $c = 0$ , und wir können  $d = 1$  annehmen, also  $\phi(z) = az + b, a \neq 0$ . Für  $a = 1, b \neq 0$  ist

$$\phi \sim b^{-1}\phi b = (z \mapsto z + 1)$$

und

$$spur^2\phi = spur^2(z \mapsto z + 1) = (1 + 1)^2 = 4.$$

Für  $a = 1, b = 0$  ist  $\phi \sim id = (z \mapsto \lambda z)$  mit  $\lambda = 1$  und  $spur^2\phi = (1 + 1)^2 = 4 = (\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2})^2$ .

Für  $a \neq 0, 1$  hat  $\phi$  einen weiteren Fixpunkt in  $z_0 \in \mathbb{C}$  und nach Konjugation mit  $(z \mapsto z + z_0)$  können wir  $z_0 = 0$  annehmen. Dies ergibt  $b = 0$  und

$$\phi \sim (z \mapsto \lambda z) \quad \text{mit } \lambda = a \in \mathbb{C} - \{0\}$$

und

$$spur^2\phi = spur^2(z \mapsto \lambda z) = spur^2 diag(\lambda^{1/2}, \lambda^{-1/2}) = (\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2})^2.$$

Klarerweise gilt

$$(z \mapsto \lambda z) \sim (1/z)^{-1}(z \mapsto \lambda z)(1/z) = (z \mapsto \lambda^{-1}z),$$

und  $\phi$  ist auch zur Drehstreckung mit reziprokem  $\lambda$  konjugiert.

Zur Eindeutigkeit bemerken wir, für  $\lambda, \mu \in \mathbb{C} - \{0\}$  gilt

$$\begin{aligned} & (\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2})^2 = (\mu^{1/2} + \mu^{-1/2})^2 \\ \iff & \lambda + \lambda^{-1} = \mu + \mu^{-1} \\ \iff & \lambda - \mu = \mu^{-1} - \lambda^{-1} = \frac{\lambda - \mu}{\lambda\mu} \\ \iff & \lambda = \mu \text{ oder } \lambda = \mu^{-1}, \end{aligned} \tag{C.3}$$

und mit der Invarianz des Quadrats der Spur unter Konjugation ist  $\lambda$  bis auf sein Reziprokes eindeutig.

Zum Beweis der letzten Aussage genügt es wieder mit der Invarianz des Quadrats der Spur unter Konjugation für  $\phi, \psi \neq id_{\mathbb{C} \cup \{\infty\}}$  mit  $spur^2 \phi = spur^2 \psi$  die Konjugiertheit  $\phi \sim \psi$  zu zeigen. Ist  $\phi \sim (z \mapsto \lambda z), \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ , so folgt  $\lambda \neq 1$ , da  $\phi \neq id_{\mathbb{C} \cup \{\infty\}}$ , und mit (C.3) weiter

$$4 = (1 + 1)^2 \neq (\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2})^2 = spur^2 \phi = spur^2 \psi.$$

Also ist  $\psi \sim (z \mapsto \mu z), \mu \in \mathbb{C} - \{0\}$ , mit

$$(\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2})^2 = spur^2 \phi = spur^2 \psi = (\mu^{1/2} + \mu^{-1/2})^2,$$

also mit (C.3) wieder  $\lambda = \mu$  oder  $\lambda = \mu^{-1}$ , und wir erhalten  $\phi \sim \psi$ .

Ist  $\phi \sim (z \mapsto z + 1)$ , so ist mit Symmetrie  $\psi \sim (z \mapsto z + 1)$ , also  $\phi \sim \psi$ , und die Proposition ist bewiesen.

///

### Bemerkungen:

1. Wir nennen gebrochen lineare Abbildungen, die konjugiert zur Translation  $z \mapsto z + 1$  sind, parabolisch, gebrochen lineare Abbildungen, die konjugiert zur Streckung  $z \mapsto \lambda z$  mit  $\lambda > 0, \lambda \neq 1$ , hyperbolisch und gebrochen lineare Abbildungen, die konjugiert zur Drehung  $z \mapsto \lambda z$  mit  $|\lambda| = 1, \lambda \neq 1$ , elliptisch. Da die Anzahl der Fixpunkte unter Konjugation invariant bleibt, sind die parabolischen gebrochen lineare Abbildungen genau die gebrochen lineare Abbildungen mit genau einem Fixpunkt.
2. Da die Ordnung eines Gruppenelements  $\phi$ , d.h. das kleinste  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\phi^k = id$ , sofern  $k$  existiert, unter Konjugation invariant bleibt, sehen wir, die einzigen gebrochen linearen Abbildungen mit endlicher Ordnung  $\neq 1$  sind die elliptischen gebrochen linearen Abbildungen mit  $\lambda$  eine Einheitswurzel  $\neq 1$ .

□

Nun können wir das Kommutieren zweier gebrochen linearer Abbildungen genau beschreiben.

**Proposition C.3** *Für zwei gebrochen lineare Abbildungen  $\phi, \psi \neq id_{\mathbb{C} \cup \{\infty\}}$ , die kommutieren, d.h.  $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$ , gilt genau eine der drei folgenden Aussagen:*

1.  $\phi, \psi$  sind beide parabolisch und haben den gleichen Fixpunkt.
2.  $\phi, \psi$  sind beide nicht parabolisch und haben die gleichen Fixpunkte.
3.  $\phi, \psi$  sind beide elliptisch, tauschen die beiden Fixpunkte der anderen Abbildung und sind beide von der Ordnung zwei, d.h.  $\phi^2 = \psi^2 = id_{\mathbb{C} \cup \{\infty\}}$ .

**Beweis:**

Für einen Fixpunkt  $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  von  $\phi$  sehen wir

$$\phi(\psi(z)) = (\phi \circ \psi)(z) = (\psi \circ \phi)(z) = \psi(z), \quad (\text{C.4})$$

und  $\psi(z) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  ist auch ein Fixpunkt von  $\phi$ . Ist  $\phi$  parabolisch, so hat  $\phi$  genau einen Fixpunkt, also ist  $\psi(z) = z$  auch ein Fixpunkt von  $\psi$ . Ist  $\psi$  nicht parabolisch, so hat mit Proposition C.2 einen weiteren Fixpunkt  $w \neq z$ . Mit Symmetrie ist  $w \neq z$  auch ein Fixpunkt von  $\phi$ , was der Parabolizität von  $\phi$  widerspricht. Damit ist  $\psi$  parabolisch und hat den gleichen Fixpunkt wie  $\phi$ , also haben wir die Aussage unter dem ersten Punkt.

Ist  $\phi \neq id_{\mathbb{C} \cup \{\infty\}}$  nicht parabolisch, so hat  $\phi$  zwei verschiedene Fixpunkte  $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , und mit (C.4) haben wir  $\psi(\{z_1, z_2\}) \subseteq \{z_1, z_2\}$ . Da  $\psi$  eine Bijektion ist, ergibt sich  $\psi(z_i) = z_i$  oder  $\psi(z_i) = z_{3-i}$ ,  $i = 1, 2$ . Im ersten Fall sind  $z_1 \neq z_2$  zwei Fixpunkte von  $\psi$ , und  $\psi$  ist nicht parabolisch mit den gleichen Fixpunkten wie  $\phi$ , also haben wir die Aussage unter dem zweiten Punkt.

Im zweiten Fall tauscht  $\psi$  die Fixpunkte von  $\phi$ , insbesondere sind weder  $z_1$  noch  $z_2$  Fixpunkte von  $\psi$ . Da  $\psi$  nach der ersten Aussage nicht parabolisch ist, hat  $\psi$  zwei Fixpunkte in  $\mathbb{C} \cup \{\infty\} - \{z_1, z_2\}$ . Klarerweise sind dies auch Fixpunkte von  $\psi^2$ . Darüberhinaus sind  $z_1$  und  $z_2$  Fixpunkte von  $\psi^2$ , also hat  $\psi^2$  vier Fixpunkte, und es folgt  $\psi^2 = id_{\mathbb{C} \cup \{\infty\}}$ . Damit hat  $\psi$  die Ordnung zwei und ist nach der 2. Bemerkung nach Proposition C.2 elliptisch. Mit Symmetrie folgt dasselbe für  $\phi$ , und die Proposition ist bewiesen.

///

Zur Bestimmung der kommutativen, frei diskontinuierlich operierenden Untergruppe von  $Aut(\mathcal{H})$  schliessen wir die elliptischen Elemente aus.

**Proposition C.4** *In  $\mathcal{H}$  fixpunktfreie Elemente von  $Aut(\mathcal{H})$  sind parabolisch oder hyperbolisch, insbesondere nicht-elliptisch und von unendlicher Ordnung.*

**Beweis:**

Nach Proposition C.1 ist jedes  $\phi \in Aut(\mathcal{H})$  von der Form  $\phi = [A]$  mit  $A \in SL(2, \mathbb{R})$ . Damit haben wir  $\phi(\bar{z}) = \overline{\phi(z)}$ , und  $z \in \mathbb{C}$  ist ein Fixpunkt von  $\phi$  genau dann, wenn  $\bar{z}$  ein Fixpunkt von  $\phi$  ist. Ist  $\phi$  fixpunktfrei in  $\mathcal{H}$ , so ist  $\phi$  auch fixpunktfrei in  $\overline{\mathcal{H}}$ , und alle Fixpunkte von  $\phi$  liegen auf  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Ist weiter  $\phi$  nicht parabolisch, so hat  $\phi$  genau zwei Fixpunkte. Nach Konjugation mit horizontalen Translationen und der negativen Inversion bleibt  $\phi \in Aut(\mathcal{H})$  fixpunktfrei in  $\mathcal{H}$ , und wir können annehmen, dass 0 und  $\infty$  die Fixpunkte von  $\phi$  sind. Dann ist  $\phi$  von der Form  $z \mapsto \lambda z$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ . Da  $\phi(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ , da  $\phi \in Aut(\mathcal{H})$ , muss  $\lambda \in ]0, \infty[$  gelten. Da weiter  $\phi \neq id_{\mathcal{H}}$ , da  $\phi$  keine Fixpunkte in  $\mathcal{H}$  hat, ist  $\phi$  mit der Definition in der 1. Bemerkung nach Proposition C.2 hyperbolisch, wie gewünscht.

Insbesondere ist  $\phi$  nicht-elliptisch und nach der 2. Bemerkung nach Proposition C.2 von unendlicher Ordnung in  $Aut(S^2)$ , d.h. für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $\phi^k \neq id_{\mathbb{C} \cup \{\infty\}}$ , also auch  $\phi^k \neq id_{\mathcal{H}}$ , da  $\phi^k \neq id_{\mathbb{C} \cup \{\infty\}}$  höchstens zwei Fixpunkte haben kann.

///

**Bemerkung:**

Die negative Inversion ist  $z \mapsto -1/z$  ist ein Element von  $\text{Aut}(\mathcal{H})$  der Ordnung zwei, also mit der 2. Bemerkung nach Proposition C.2 elliptisch. Die negative Inversion hat genau  $i$  als Fixpunkt in  $\mathcal{H}$ .

□

Nun können wir alle kommutativen, frei diskontinuierlich operierenden Untergruppen von  $\text{Aut}(\mathcal{H})$  bestimmen.

**Proposition C.5** *Jede nicht-triviale, kommutative, frei diskontinuierlich operierende Untergruppe von  $\text{Aut}(\mathcal{H})$  ist zyklisch von unendlicher Ordnung, genauer ist jede solche Untergruppe bis auf Konjugation die Gruppe der horizontalen Translationen*

$$\{(z \mapsto z + k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

oder die Gruppe von Streckungen

$$\{(z \mapsto \lambda^k z) \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ mit } \lambda > 1.$$

**Beweis:**

Es sei  $\{id_{\mathcal{H}}\} \neq \Gamma \subseteq \text{Aut}(\mathcal{H})$  eine kommutative, frei diskontinuierlich operierende Untergruppe. Insbesondere gilt für  $\phi, \psi \in \Gamma$ , dass  $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$  auf  $\mathcal{H}$ , also hat  $\phi \circ \psi \circ \phi^{-1} \circ \psi^{-1} = id_{\mathcal{H}}$  mehr als zwei Fixpunkte und somit  $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$  auf  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Damit ist Proposition C.3 für alle  $\phi, \psi \in \Gamma$  anwendbar.

Ist ein  $\phi \in \Gamma - \{id_{\mathcal{H}}\}$  parabolisch, so sind mit Proposition C.3 alle von der Identität verschiedenen Elemente parabolisch, und haben alle den gleichen Fixpunkt in  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Da  $\text{Aut}(\mathcal{H}) = [SL(2, \mathbb{R})]$ , sind die konjugierten von Fixpunkte wieder Fixpunkte, also da  $\phi$  genau einen Fixpunkt hat, muss dieser auf  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  liegen. Nach Konjugation mit einer horizontalen Translation und der negativen Inversion, was die Kommutativität und das freie diskontinuierliche Operieren erhält, können wir annehmen, dass  $\infty$  ein Fixpunkt für alle  $\phi \in \Gamma$  ist. Für  $\phi = [A] \in \Gamma - \{id_{\mathcal{H}}\}$  mit  $A \in GL(2, \mathbb{R})$ ,  $A = ((a, c)^T, (b, d)^T)$  folgt  $c = 0$ , und wir können  $d = 1$  annehmen, also  $\phi(z) = az + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . Für  $a \neq 1$  hat  $\phi$  einen weiteren Fixpunkt in  $\mathbb{C}$ , was aber der Parabolizität von  $\phi$  widerspricht, und es gilt  $a = 1$ . Damit sind alle  $\phi \in \Gamma$  horizontale Translationen, und  $\Gamma$  ist isomorph zur Gruppe der Translationsvektoren  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}$ , d.h.

$$\Gamma \cong \{\phi(i) - i \mid \phi \in \Gamma\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Da  $\Gamma$  frei diskontinuierlich auf  $\mathcal{H}$  operiert, gibt es  $v \in \Gamma$  mit  $|v| = \min_{w \in \Gamma - \{0\}} |w| > 0$ , und nach einer Konjugation mit einer Streckung, können wir  $|v| = 1$  annehmen. Dann ist  $\Gamma = \{(z \mapsto z + k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , wie gewünscht.

Andernfalls sind alle  $\phi \in \Gamma - \{id_{\mathcal{H}}\}$  nicht parabolisch und haben zwei Fixpunkte in  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Da  $\Gamma$  als frei diskontinuierlich operierende Untergruppe insbesondere fixpunktfrei in  $\mathcal{H}$  ist, enthält  $\Gamma$  mit Proposition C.4 keine elliptischen Elemente, und mit Proposition C.3 haben alle  $\phi \in \Gamma - \{id_{\mathcal{H}}\}$  die gleichen beiden Fixpunkte in  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Wieder da  $\text{Aut}(\mathcal{H}) = [SL(2, \mathbb{R})]$ , sind die konjugierten von Fixpunkte wieder Fixpunkte, und, da  $\phi \in \Gamma - \{id_{\mathcal{H}}\}$  fixpunktfrei in  $\mathcal{H}$  sind, liegen beide Fixpunkte auf  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Nach Konjugation mit zwei horizontalen Translationen und der negativen Inversion, was die

Kommutativität und das freie diskontinuierliche Operieren erhält, können wir annehmen, dass  $0$  und  $\infty$  die beiden Fixpunkte für alle  $\phi \in \Gamma - \{id_{\mathcal{H}}\}$  sind. Für  $\phi = [A] \in \Gamma - \{id_{\mathcal{H}}\}$  mit  $A \in GL(2, \mathbb{R}), A = ((a, c)^T, (b, d)^T)$  folgt  $b = c = 0$ , und wir können  $d = 1$  annehmen, also  $\phi(z) = \lambda z, \lambda = a \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Da  $\phi \in Aut(\mathcal{H})$ , folgt weiter  $\lambda > 0$ , und alle  $\phi \in \Gamma$  sind Streckungen, und  $\Gamma$  ist isomorph zur Gruppe der Streckfaktoren  $\Gamma \subseteq ]0, \infty[$ , d.h.

$$\Gamma \cong \{\phi(i)/i \mid \phi \in \Gamma\} \subseteq ]0, \infty[.$$

Da  $\Gamma$  frei diskontinuierlich auf  $\mathcal{H}$  operiert, gibt es  $\lambda \in \Gamma$  mit  $|\log \lambda| = \min_{w \in \Gamma - \{1\}} |\log w| > 0$ , und wir erhalten  $\Gamma = \{(z \mapsto \lambda^k z) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , wie gewünscht. Damit ist die Proposition bewiesen.

///

## D Der Satz von Sard

In diesem Anhang geben wir einen Beweis für den Satz von Sard für glatte Abbildungen und folgen dabei und [M].

**Satz D.1 (Satz von Sard [S], [M])** *Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, nichtleer, und  $f \in C_{loc}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ . Dann ist die Menge der singulären Werte von  $f$ , d.h. die Menge aller  $y \in \mathbb{R}^m$  für die ein  $x \in \Omega$  mit  $f(x) = y$  und*

$$Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ ist nicht surjektiv}$$

*existiert, eine  $\mathcal{L}^m$ -Nullmenge in  $\mathbb{R}^m$ .*

**Beweis:**

Wir betrachten die Mengen der singulären Punkte

$$C_0 := \{x \in \Omega \mid \text{rank } Df(x) < m\}$$

und

$$C_k := \{x \in \Omega \mid D^j f(x) = 0 \text{ für } j = 1, \dots, k\} \text{ für } k = 1, \dots, l,$$

$C_{l+1} := \emptyset, l \in \mathbb{N}$ , und zeigen

$$\mathcal{L}^m(f(C_k - C_{k+1})) = 0 \text{ für } k = 0, \dots, l, \quad (\text{D.1})$$

wenn  $lm \geq n$ , was die Behauptung beweist.

Für  $k = l, lm \geq n$  und  $x \in C_l$  sehen wir mit dem Satz von Taylor, dass  $f(x+h) - f(x) = o(|h|^l)$ , genauer existiert mit der gleichmässigen Stetigkeit von  $D^l f$  für jedes kompakte  $K \subseteq \Omega$  und  $\varepsilon > 0$  ein  $\varrho_{K,\varepsilon} > 0$  mit  $d(K, \partial\Omega) > \varrho_{K,\varepsilon}$  und

$$f(B_{\varrho^l}(x)) \subseteq B_{\varepsilon\varrho^l}(f(x)) \text{ für alle } 0 < \varrho < \varrho_{K,\varepsilon}, x \in C_l \cap K. \quad (\text{D.2})$$

Nun wählen wir für  $0 < \varrho < \varrho_{K,\varepsilon}$  eine maximale Menge paarweise verschiedener Punkte  $x_j \in C_l \cap K, j \in J$ , mit  $|x_i - x_j| \geq \varrho$  für  $i \neq j$ . Dann gilt mit der Maximalität

$$C_l \cap K \subseteq \cup_{j \in J} B_{\varrho}(x_j) \quad (\text{D.3})$$

und andererseits sind  $B_{\varrho/2}(x_j), j \in J$ , paarweise disjunkt, insbesondere

$$\begin{aligned} |J| \varrho^n 2^{-n} \mathcal{L}^n(B_1(0)) &= \sum_{j \in J} \mathcal{L}^n(B_{\varrho/2}(x_j)) = \mathcal{L}^n(\cup_{j \in J} B_{\varrho/2}(x_j)) \leq \\ &\leq \mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, K) < \varrho_{K,\varepsilon}\}) =: M_K < \infty, \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

und  $|J|$  ist endlich. Mit (D.2) und (D.3) erhalten wir

$$\mathcal{L}^m(f(C_l \cap K)) \leq \mathcal{L}^m(\cup_{j \in J} f(B_{\varrho}(x_j))) \leq \sum_{j \in J} \mathcal{L}^m(B_{\varepsilon\varrho^l}(f(x_j))) \leq |J|(\varepsilon\varrho^l)^m \mathcal{L}^m(B_1(0)).$$

Da  $lm \geq n$ , ergibt dies für  $\varepsilon, \varrho_{K,\varepsilon} < 1$  mit (D.4), dass

$$\mathcal{L}^m(f(C_l \cap K)) \leq |J| \varepsilon \varrho^n \mathcal{L}^m(B_1(0)) \leq C_{n,m} M_K \varepsilon,$$

also  $\mathcal{L}^m(f(C_l \cap K)) = 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $\mathcal{L}^n(f(C_l)) = 0$  mit einer abzählbaren Ausschöpfung von  $\Omega$  mit kompakten Mengen. Dies ergibt (D.1) für  $k = l$ .

Für  $n = 1, k = 0, \dots, l - 1$  besteht

$$C_k - C_{k+1} \subseteq [f^{(k)} = 0] \cap [f^{(k+1)} \neq 0]$$

nur aus isolierten Punkten, ist also höchstens abzählbar. Daraus folgt (D.1) für  $k = 0, \dots, l - 1$  sofort, und der Satz ist für  $n = 1$  bewiesen.

Für  $n \geq 2$  beweisen wir den Satz mit Induktion über  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $k = 0, m = 1$  sehen wir

$$C_0 = \{x \in \Omega \mid \text{rank } Df(x) < m = 1\} = [Df = 0] = C_1,$$

also  $C_0 - C_1 = \emptyset$ , und (D.1) ist für  $k = 0, m = 1$  trivial erfüllt. Für  $k = 0, m \geq 2$  und  $x \in C_0 - C_1$  ist  $Df(x) \neq 0$ , z.B.  $\partial_n f_m(x) \neq 0$  nach Umnummerierung, und zum Beweis von (D.1) für  $k = 0$  genügt es zu zeigen, dass

$$\mathcal{L}^m(f(C_0 \cap [\partial_n f_m \neq 0])) = 0.$$

Da  $A := C_0 \cap [\partial_n f_m \neq 0]$  in  $\Omega \cap [\partial_n f_m \neq 0]$  abgeschlossen ist, kann diese Menge als abzählbare Vereinigung kompakter Mengen geschrieben werden. Da deren Bild unter der stetigen Abbildung  $f$  wieder kompakt sind, ist  $f(C_0 \cap [\partial_n f_m \neq 0])$  eine Borelmenge, insbesondere  $\mathcal{L}^m$ -messbar.

Da  $m \geq 2$ , genügt mit dem Satz von Fubini zu zeigen, dass

$$\mathcal{L}^{m-1}(\{z \in \mathbb{R}^{m-1} \mid (z, t) \in f(A)\}) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir

$$A_t := A \cap [f_m = t] = C_0 \cap [f_m = t] \cap [\partial_n f_m \neq 0]$$

und  $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}, \pi(z, z_m) := z$ , so müssen wir zeigen, dass

$$\mathcal{L}^{m-1}((\pi \circ f)(A_t)) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}. \quad (\text{D.5})$$

Da  $n \geq 2$ , existiert zu  $x \in A_t = C_0 \cap [f_m = t] \cap [\partial_n f_m \neq 0]$  mit dem Satz über implizite Funktionen eine  $C^\infty$ -Funktion  $\psi : V(0) \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\psi(0) = 0$  und

$$U(x) \cap [f_m = f_m(x) = t] \subseteq x + \{(y, \psi(y)) \mid y \in V(0)\}$$

für geeignet kleine Umgebungen  $U(x) \subseteq \mathbb{R}^n, V(0) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ . Machen wir in  $U(x)$  den  $C^\infty$ -Parameterwechsel  $(y, s) \mapsto x + (y, \psi(y) + s)$ , was das Bild von  $\pi \circ f$  unverändert lässt, so können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $\psi \equiv 0, x = 0$ , also  $f_m(y, 0) = t$ . Setzen wir  $\varphi(y) := (\pi \circ f)(y, 0)$ , so erhalten wir

$$Df(y, 0) = \begin{pmatrix} D\varphi(y) & * \\ 0 & \partial_n f_m(y, 0) \end{pmatrix}.$$

Da  $\partial_n f_m(y, 0) \neq 0$  für  $V(0)$  genügend klein, da  $\partial_n f_m(x) \neq 0$ , so sehen wir

$$\text{rank } Df(y, 0) = 1 + \text{rank } D\varphi(y)$$

oder anders ausgedrückt

$$Df(y, 0) \text{ ist surjektiv} \iff D\varphi(y) \text{ ist surjektiv.}$$

Da  $Df(y, 0)$  für  $(y, 0) \in C_0$  nicht surjektiv ist, sehen wir

$$(\pi \circ f)(A_t \cap U(x)) \subseteq \{ \text{singuläre Werte von } \varphi \}.$$

Da  $\varphi \in C^\infty$ , erhalten wir mit Induktion

$$\mathcal{L}^{m-1}((\pi \circ f)(A_t \cap U(x))) = 0 \quad \text{für jedes } x \in A_t.$$

Überdecken wir  $A_t$  mit abzählbar vielen  $U(x)$ , so folgt (D.5), und (D.1) ist für  $k = 0$  bewiesen.

Für  $k = 1, \dots, l-1$  und  $x \in C_k - C_{k+1}$  gilt  $D^j f(x) = 0$  für  $j = 1, \dots, k$  und  $D(D^k f)(x) = D^{k+1} f(x) \neq 0$ , z.B.  $\partial_n D^\gamma f_m(x) \neq 0$  für einen Multiindex  $\gamma$  mit  $|\gamma| = k \geq 1$  nach Umnummerierung. Da  $D^k f \in C^\infty$ , existiert mit dem Satz über implizite Funktionen und eine  $C^\infty$ -Funktion  $\psi : V(0) \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$U(x) \cap C_k - C_{k+1} \subseteq U(x) \cap [D^\gamma f_m = 0] \subseteq x + \{(y, \psi(y)) \mid y \in V(0)\}$$

für geeignet kleine Umgebungen  $U(x) \subseteq \mathbb{R}^n, V(0) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ . Nun betrachten wir  $\varphi : V(0) \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $\varphi(y) := f(x + (y, \psi(y)))$ . Für  $x + (y, \psi(y)) \in C_k - C_{k+1}$  haben wir insbesondere  $Df(x + (y, \psi(y))) = 0$ , also auch  $D\varphi(y) = 0$ . Dies ergibt

$$f(U(x) \cap C_k - C_{k+1}) \subseteq \{ \text{singuläre Werte von } \varphi \}.$$

Da  $\varphi \in C^\infty$ , erhalten wir mit Induktion

$$\mathcal{L}^m(U(x) \cap C_k - C_{k+1}) = 0 \quad \text{für jedes } x \in C_k - C_{k+1}.$$

Überdecken wir  $C_k - C_{k+1}$  mit abzählbar vielen  $U(x)$ , so folgt (D.1) für  $k = 1, \dots, l-1$ , und der Satz ist bewiesen.

///

### **Bemerkung:**

Tatsächlich gilt der Satz von Sard für  $C^l$ -Abbildungen  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit

$$l > \max(n - m, 0), \tag{D.6}$$

siehe [S].

□

## E Das zweite Abzählbarkeitsaxiom

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass die Voraussetzung des zweiten Abzählbarkeitsaxioms für Riemannsche Flächen überflüssig ist, genauer zeigen wir, jeder zusammenhängende Hausdorff-Raum mit komplexer Struktur erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Auf solchen Räumen nennen wir Funktionen holomorph bzw. harmonisch, wenn sie lokal holomorph bzw. lokal harmonisch sind. Andererseits können wir nicht die Existenz einer hermiteschen Metrik verwenden, da wir in Proposition 3.1 wesentlich das zweite Abzählbarkeitsaxiom verwendet haben. Kompakte Mengen sind aber immer in Riemannschen Flächen enthalten.

**Proposition E.1** *Es sei  $M$  ein zusammenhängender Hausdorff-Raum mit komplexer Struktur und  $K \subseteq M$  eine kompakte bzw.  $\sigma$ -kompakte Teilmenge, d.h. einer abzählbaren Vereinigung kompakter Mengen. Dann existiert  $K \subseteq M_0 \subseteq M$  offen, zusammenhängend, mit kompaktem Abschluss  $\overline{M_0} \subseteq M$ , wenn  $K$  kompakt ist, und  $M_0$  erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, insbesondere ist  $M_0$  für  $M_0 \neq \emptyset$  eine Riemannsche Fläche.*

**Beweis:**

Mit der komplexen Struktur von  $M$  betrachten wir die Karten  $z_l : U_l \subseteq M \xrightarrow{\approx} B_1(0) \subseteq \mathbb{C}$  und  $U_l$  offen, zusammenhängend und kompaktem Abschluss  $\overline{U_l} \subseteq M$ . Ist  $K$  kompakt, so wird  $K$  von endlich vielen  $z_l^{-1}(B_{1/2}(0)), l = 1, \dots, L$  überdeckt. Da  $M$  zusammenhängend ist, lassen sich alle beliebige  $U_l$  mit  $U_{l'}$  durch eine Kette  $U_{l_1}, \dots, U_{l_J}$  mit  $l_1 = l, l_J = l', j = 1, \dots, J$  und

$$U_{l_{j-1}} \cap U_{l_j} \neq \emptyset \quad \text{für } j = 1, \dots, J$$

verbinden. Geben wir für jedes  $1 \leq l < l' \leq K$  eine solche Kette zu den  $U_l$ , so können wir annehmen, dass sich alle  $U_l$  mit  $U_{l'}, 1 \leq l < l' \leq L$  durch eine Kette mit  $1 \leq l_j \leq L$  verbinden lassen. Dann ist  $M_0 := \cup_{l=1}^L U_l \supseteq K$  offen, zusammenhängend, da  $U_l$  zusammenhängend sind, mit kompaktem Abschluss  $\overline{M_0} = \cup_{l=1}^L \overline{U_l} \subseteq M$ , und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Für  $\sigma$ -kompaktes  $K \subseteq M$ , d.h.  $K = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$  mit  $K_n \subseteq M$  kompakt, existieren nach obigem Argument  $\cup_{k=1}^n K_k \subseteq M_{0,n} \subseteq M$  offen, zusammenhängend, und  $M_{0,n}$  erfüllen das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Dann ist  $K \subseteq M_0 := \cup_{n=1}^{\infty} M_{0,n} \subseteq M$  offen und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Weiter können wir  $K \neq \emptyset$  und  $K_1 \neq \emptyset$  annehmen, und erhalten  $\emptyset \neq K_1 \subseteq \cap_{n=1}^{\infty} M_{0,n}$ , also, da alle  $M_{0,n}$  zusammenhängend sind, ist auch  $M_0 := \cup_{n=1}^{\infty} M_{0,n}$  zusammenhängend, und die Proposition ist bewiesen.

///

Ohne eine Metrik können wir das Integral der Gradienten wie in Definition 7.1 definieren.

**Definition E.1** *Es sei  $M$  ein zusammenhängender Hausdorff-Raum mit komplexer Struktur. Wir definieren  $W_{loc}^{1,2}(M) = W_{loc}^{1,2}(M, \mathbb{R})$  als die Menge der Funktionen  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ , für die für jede Karte  $z : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}$  die Verkettung*

$$u \circ z^{-1} \in W_{loc}^{1,2}(z(U)).$$

Für  $u, v \in W_{loc}^{1,2}(M)$  mit  $\text{supp } du \cap \text{supp } dv \subseteq M$  kompakt wählen wir mit Proposition E.1 eine offene Riemannsche Fläche  $\text{supp } du \cap \text{supp } dv \subseteq M_0 \subseteq M$  und mit Proposition 3.4 eine hermitesche Metrik  $g_0$  auf  $M_0$  und definieren

$$\int_M \nabla u \cdot \nabla v := \int_{M_0} g_0(\nabla_{g_0} u, \nabla_{g_0} v) \, d\mu_{g_0}.$$

Wir schreiben für  $u \in W_{loc}^{1,2}(M)$  mit kompaktem Träger  $\text{supp } du \subseteq M$  in der Form

$$\| \nabla u \|_{L^2(M)}^2 = \int_M |\nabla u|^2 := \int_M \nabla u \cdot \nabla u$$

□

### Bemerkungen:

1. Mit einer Partition der Eins, wie z.B. in [Sch-a] §B,  $0 \leq \eta_k \leq 1, \sum_{k=1}^K \eta_k \equiv 1$  auf  $\text{supp } du \cap \text{supp } dv, \eta_k \in C_0^\infty(U_k)$  und mit Karten  $z_k : U_k \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}, k = 1, \dots, K$  sehen wir mit (7.1), dass

$$\int_{M_0} g_0(\nabla_{g_0} u, \nabla_{g_0} v) \, d\mu_{g_0} = \sum_{k=1}^K \int_{z_k(U_k)} (\eta_k \circ z_k^{-1}) \cdot \nabla(u \circ z_k^{-1}) \cdot \nabla(v \circ z_k^{-1}) \, d\mathcal{L}^2, \quad (\text{E.1})$$

und  $(u, v) \mapsto \int_M \nabla u \cdot \nabla v$  ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von  $M_0$  und  $g_0$ , bilinear, symmetrisch und ein Skalarprodukt auf  $C_0^\infty(M)$  für nicht-kompaktes  $M$  bzw. auf  $C_0^\infty(M)/\{1\}$  für kompaktes  $M$ , also ist  $\| \cdot \|_{L^2(M)}$  eine Norm bzw. eine Pseudo-Norm auf  $C_0^\infty(M)$ .

2. Für  $u \in W_{loc}^{1,2}(M)$ , sehen wir für jede Karte  $z : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}$  und jede Borelmenge  $B \subset\subset U$  mit (7.1), dass

$$\int_B |\nabla_{g_0} u|_{g_0}^2 \, d\mu_{g_0} = \int_{z(B)} |\nabla(u \circ z^{-1})|^2 \, d\mathcal{L}^2.$$

Dies ergibt für  $\text{supp } du \subseteq M$  kompakt und eine weitere offene Riemannsche Fläche  $M_1 \subseteq M$  mit einer hermiteschen Metrik  $g_1$  auf  $M_1$  aber ohne die Voraussetzung  $\text{supp } du \subseteq M_1$  für o.B.d.A.  $M_1 \subseteq M_0$ , dass

$$\int_{M_1} |\nabla_{g_1} u|_{g_1}^2 \, d\mu_{g_1} = \int_{M_1} |\nabla_{g_0} u|_{g_0}^2 \, d\mu_{g_0},$$

insbesondere

$$\int_{M_1} |\nabla_{g_1} u|_{g_1}^2 \, d\mu_{g_1} \leq \| \nabla u \|_{L^2(M)}^2. \quad (\text{E.2})$$

3. Wie oben definieren wir  $u \in C_{loc}^\infty(M) \Leftrightarrow u \circ z^{-1} \in C_{loc}^\infty(z(U))$  für alle Karten  $z : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}$ , und  $C_0^\infty(M) := \{u \in C_{loc}^\infty(M) \mid \text{supp } u \subseteq M \text{ kompakt}\}$ .

□

Die Vervollständigung von  $C_0^\infty(M)$  bzw.  $C_0^\infty(M)/\{1\}$  bezüglich des Skalarprodukts  $(u, v) \mapsto \int_M \nabla u \cdot \nabla v$  charakterisieren wir in der folgenden Proposition.

**Proposition E.2** *Es sei  $M$  ein zusammenhängender Hausdorff-Raum mit komplexer Struktur und  $u_m \in W_{loc}^{1,2}(M)$  mit kompakten Trägern  $\text{supp } du_m$  eine Cauchyfolge in der Pseudo-Norm  $\|\nabla \cdot\|_{L^2(M)}$ . Dann existieren  $c_m \in \mathbb{R}$  und  $u \in W_{loc}^{1,2}(M)$  mit für alle Karten  $z : U \rightarrow \mathbb{C}$  konvergieren*

$$(u_m - c_m) \circ z^{-1} \rightarrow u \circ z^{-1} \quad \text{in } W_{loc}^{1,2}(z(U))$$

und

$$\int_M \nabla u \cdot \nabla v = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_M \nabla u_m \cdot \nabla v$$

für alle  $v \in W_{loc}^{1,2}(M)$  mit kompaktem Träger  $\text{supp } dv$ .

**Beweis:**

Für eine beliebige Karte  $z : U \rightarrow \mathbb{C}$  sehen wir mit (E.2), dass

$$\int_{z(U)} |\nabla((u_m - u_n) \circ z^{-1})|^2 d\mathcal{L}^2 \leq \|\nabla(u_m - u_n)\|_{L^2(M)}^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } m, n \rightarrow \infty,$$

also konvergieren  $\nabla(u_m \circ z^{-1})$  in  $L^2(z(U))$ . Wählen wir eine Karte  $w : U_0 \subseteq M \xrightarrow{\approx} B_1(0)$  mit kompaktem Abschluss  $\overline{U_0} \subseteq M$  und setzen

$$c_m := \int_{B_{1/2}(0)} (u_m \circ w^{-1}) d\mathcal{L}^2$$

und wählen wir weiter für obige Karte  $z$  und  $V \subset\subset U$  mit Proposition E.1 eine offene Riemannsche Fläche  $\overline{U_0} \cup \overline{V} \cup \bigcup_{m=1}^\infty \text{supp } du_m \subseteq M_0 \subseteq M$  und mit Proposition 3.4 eine hermitesche Metrik  $g_0$  auf  $M_0$ , so erhalten wir mit der Poincaré-Ungleichung, Proposition 7.3, dass

$$\begin{aligned} \int_{z(V)} |((u_m - c_m) \circ z^{-1}) - ((u_n - c_n) \circ z^{-1})|^2 d\mathcal{L}^2 &\leq C(g_0, V) \int_V |(u_m - u_n) - (c_m - c_n)|^2 \mu_{g_0} \leq \\ &\leq C(M_0, V, g_0, w) \int_{M_0} |\nabla_{g_0}(u_m - u_n)|^2 d\mu_{g_0} = C(M_0, V, g_0, w) \|\nabla(u_m - u_n)\|_{L^2(M)}^2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

also konvergieren die Funktionen  $(u_m - c_m) \circ z^{-1}$  in  $W_{loc}^{1,2}(z(U))$  für alle obigen Karten.

Für  $v \in W_{loc}^{1,2}(M)$  mit kompaktem Träger  $\text{supp } dv$ , einer Partition der Eins  $0 \leq \eta_k \leq 1$ ,  $\sum_{k=1}^K \eta_k \equiv 1$  auf  $\text{supp } v$ ,  $\eta_k \in C_0^\infty(U_k)$  und mit Karten  $z_k : U_k \subseteq M \xrightarrow{\approx} B_1(0) \subseteq \mathbb{C}$ ,  $k = 1, \dots, K$  sehen wir mit (E.1), dass

$$\int_M \nabla u_m \cdot \nabla v = \sum_{k=1}^K \int_{z_k(U_k)} (\eta_k \circ z_k^{-1}) \cdot \nabla(u_m \circ z_k^{-1}) \cdot \nabla(v \circ z_k^{-1}) d\mathcal{L}^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum_{k=1}^K \int_{z_k(U_k)} (\eta_k \circ z_k^{-1}) \cdot \nabla(u \circ z_k^{-1}) \cdot \nabla(v \circ z_k^{-1}) \, d\mathcal{L}^2 = \int_M \nabla u \cdot \nabla v,$$

und die Proposition ist bewiesen.

///

Damit erhalten wir eine Lösung des Poisson-Problems.

**Proposition E.3 (Poisson-Problem unbeschränkt)** *Es sei  $M$  ein zusammenhängender Hausdorff-Raum mit komplexer Struktur,  $\emptyset \neq M_0 \subseteq M$  eine offene, zusammenhängende Teilmenge, die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, also eine Riemannsche Fläche ist,  $g_0$  eine hermitesche Metrik auf  $M_0$  und  $\varphi \in C_0^\infty(M_0)$  mit  $\int_{M_0} \varphi \, d\mu_{g_0} = 0$ . Dann existiert eine glatte Lösung  $u \in C_{loc}^\infty(M)$  des Poisson-Problems*

$$\begin{aligned} \Delta_{g_0} u &= \varphi \quad \text{in } M_0, \\ u &\text{ ist harmonisch in } M - \text{supp } \varphi. \end{aligned} \tag{E.3}$$

Weiter ist  $[du \neq 0]$  im Abschluss einer  $\sigma$ -kompakten Menge, d.h. einer abzählbaren Vereinigung kompakter Mengen, enthalten.

#### Beweis:

Wir lösen das Poisson-Problem o.B.d.A. für reellwertiges  $\varphi$  mit Hilbertraumtechniken und definieren das lineare Funktional  $\Lambda$  durch

$$\Lambda v := - \int_{M_0} \varphi \cdot v \, d\mu_{g_0} \tag{E.4}$$

für alle  $v \in C_0^\infty(M)$ . Da  $\int_{M_0} \varphi \, d\mu_{g_0} = 0$ , sehen wir mit der Poincaré-Ungleichung, Proposition 7.3, für eine offene Menge  $\text{supp } \varphi \subseteq \Omega \subseteq M_0$  mit kompaktem Abschluss  $\overline{\Omega} \subseteq M_0$  mit Proposition E.1 und für geeignetes  $c \in \mathbb{R}$  mit (E.2), dass

$$\begin{aligned} |\Lambda v| &= \left| \int_{\text{supp } \varphi} \varphi \cdot (v - c) \, d\mu_{g_0} \right| \leq C \left( \int_{\Omega} |v - c|^2 \, d\mu_{g_0} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq C \left( \int_{M_0} |\nabla_{g_0} v|_{g_0}^2 \, d\mu_{g_0} \right)^{1/2} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(M)}, \end{aligned}$$

und  $\Lambda$  ist stetig bezüglich der Pseudo-Norm  $\|\nabla \cdot\|_{L^2(M)}$ .

Mit dem Satz von Riesz existiert ein  $h$  in der Vervollständigung von  $H$  von  $C_0^\infty(M)$  bzw.  $C_0^\infty(M)/\{1\}$  mit

$$\langle h, v \rangle_H = \Lambda v \quad \forall v \in H. \tag{E.5}$$

Da  $C_0^\infty(M)$  bzw.  $C_0^\infty(M)/\{1\}$  in  $H$  dicht liegt, existieren  $u_m \in C_0^\infty(M)$  mit  $\bar{u}_m := u_m$  bzw.  $\bar{u}_m := u_m + \text{span}\{1\} \rightarrow h$  in  $H$ , also ist  $u_m$  eine Cauchyfolge in der Pseudo-Norm  $\|\nabla \cdot\|_{L^2(M)}$ . Da  $u_m$  kompakte Träger haben, existieren mit Proposition E.2 Werte  $c_m \in \mathbb{R}, u \in W_{loc}^{1,2}(M)$ , so dass für alle Karten  $z : U \rightarrow \mathbb{C}$  die Folgen

$$(u_m - c_m) \circ z^{-1} \rightarrow u \circ z^{-1} \quad \text{in } W_{loc}^{1,2}(z(U)) \tag{E.6}$$

konvergieren, und mit (E.5) sehen wir weiter für alle  $v \in C_0^\infty(M)$ , dass

$$\int_M \nabla u \cdot \nabla v \leftarrow \int_M \nabla u_m \cdot \nabla v = \langle \bar{u}_m, \bar{v} \rangle_H \rightarrow \langle h, \bar{v} \rangle_H = \Lambda v = - \int_{M_0} \varphi \cdot v \, d\mu_{g_0}.$$

Insbesondere sehen wir für alle Karten  $z : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $g_0 = \lambda^2 z^* g_{can}$  auf  $U$  mit  $\lambda \in C_{loc}^\infty(U, ]0, \infty[)$  und alle  $v \in C_0^\infty(U)$  mit (E.1), dass

$$\begin{aligned} \int_{z(U)} \nabla(u \circ z^{-1}) \cdot \nabla(v \circ z^{-1}) \, d\mathcal{L}^2 &= \int_M \nabla u \cdot \nabla v = \\ &= - \int_{M_0} \varphi \cdot v \, d\mu_{g_0} = - \int_{z(U)} (\varphi \circ z^{-1}) \cdot (v \circ z^{-1}) \lambda^2 \, d\mathcal{L}^2. \end{aligned}$$

Für  $U \cap \text{supp } \varphi = \emptyset$  erhalten wir mit dem Lemma von Weyl, siehe [GT] Exercise 2.8 bzw. [Sch-c] Lemma 2.1, dass  $u \circ z^{-1}$  harmonisch in  $z(U)$  ist, also ist  $u$  harmonisch in  $M - \text{supp } \varphi$  und insbesondere  $u \in C_{loc}^\infty(M - \text{supp } \varphi)$ , und wir haben den zweiten Teil in (E.3).

Für  $U \subseteq M_0$  ist  $u \circ z^{-1}$  eine schwache Lösung von  $\Delta(u \circ z^{-1}) = (\varphi \circ z^{-1}) \lambda^2$  in  $z(U)$ , und mit Standardtheorie für elliptische Gleichungen, siehe [GT] Theorem 8.10 bzw. [Sch-c] Korollar 6.6, folgt  $u \circ z^{-1} \in C_{loc}^\infty(z(U))$  bzw.  $u \in C_{loc}^\infty(M_0)$  und  $\Delta_{g_0} u = \varphi$  in  $M_0$ . Zusammen ist  $u \in C_{loc}^\infty(M)$  eine Lösung des Poisson-Problems (E.3).

Schliesslich haben wir mit (E.6) nach Übergang zu einer Teilfolge

$$\nabla(u_m \circ z^{-1}) \rightarrow \nabla(u \circ z^{-1}) \quad \text{fast überall bezüglich } \mathcal{L}^2 \text{ in } z(U),$$

also für die  $\sigma$ -kompakte Menge  $C := \cup_{m=1}^\infty \text{supp } u_m$ , dass

$$\nabla(u \circ z^{-1}) = 0 \quad \text{fast überall bezüglich } \mathcal{L}^2 \text{ in } z(U - C).$$

Da  $u \in C_{loc}^\infty(M)$ , schliessen wir  $[du \neq 0] \subseteq \overline{C}$ , und die Proposition ist bewiesen.

///

**Satz E.1 (Zweites Abzählbarkeitsaxiom)** *Jeder zusammenhängende Hausdorff-Raum  $M$  mit komplexer Struktur erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, ist also für  $M \neq \emptyset$  eine Riemannsche Fläche.*

**Beweis:**

Wie im Beweis von Proposition 7.6 erhalten wir für eine holomorphe Funktion  $f$  in einer punktierten offenen Umgebung eines Punktes  $p \in M$  durch Lösen eines Poisson-Problems mit Proposition E.3, wobei wir die offene Riemannsche Fläche  $M_0 := U(p)$  für eine Karte  $z : U(p) \xrightarrow{\sim} B_1(0)$ ,  $p \in U(p)$ , und die hermitesche Metrik durch  $g_0 := z^* g_{can}$  wählen, eine nicht notwendigerweise beschränkte harmonische Fortsetzung  $u$  des Realteils von  $f$ , d.h.  $u$  ist harmonisch in  $M - \{p\}$  mit

$$\lim_{q \rightarrow p} (u(q) - \text{Re}(f)(q)) = 0.$$

Aus Proposition E.3 erhalten wir weiter,  $[du \neq 0]$  im Abschluss einer  $\sigma$ -kompakten Menge enthalten.

Daraus erhalten wir wie im Beweis von Satz 7.1 für zwei Punkte  $p_1 \neq p_2 \in M$  die Existenz einer nicht-konstanten meromorphen Funktion bzw. holomorphen Abbildung  $f : M \rightarrow S^2$ . Der Pullback  $g := f^*g_{S^2}$  ist eine Riemmansche Pseudo-Metrik auf  $M$ , und  $g$  ist positiv ausserhalb der Verzweigungspunkte von  $f$  bzw.  $g$  verschwindet nur auf der Menge  $A := [df = 0]$ . Da  $f$  nicht-konstant ist, hat  $A := [df = 0]$  keine Häufungspunkte in  $M$ , und somit erzeugt die Abstandsmetrik von  $g$  die Topologie von  $M$ , also ist  $M$  metrisierbar.

Als nächstes zeigen wir, dass  $M$  separabel ist. Dazu beachten wir aus dem Beweis von Satz 7.1, dass  $f$  für zwei harmonische Funktionen  $u_j$  in  $M - \{p_j\}, p_1 \neq p_2$ , wie oben lokal von der Form  $f = \partial_z u_1 / \partial_z u_2$  ist, und mit Proposition E.3 ist  $[du_1 \neq 0] \cup [du_2 \neq 0]$  im Abschluss einer  $\sigma$ -kompakten Menge  $C \subseteq M$  enthalten bzw.  $du_1, du_2 = 0$  auf der offenen Menge  $M - \overline{C}$ . Weiter haben wir im Beweis von Satz 7.1 gesehen, dass sich die Nullstellen von  $du_1$  und  $du_2$  in  $M$  nicht häufen können, also  $M = \overline{C}$ .

Mit Proposition E.1 ist jede kompakte Teilmenge von  $M$  in einer Menge enthalten, die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, und somit erfüllt jede kompakte Teilmenge das zweite Abzählbarkeitsaxiom und ist separabel. Damit enthält  $C$  als  $\sigma$ -kompakte Menge von  $M$  eine abzählbare, dichte Teilmenge  $D \subseteq C$ . Wir sehen  $M = \overline{C} \subseteq \overline{D}$ , und  $M$  ist separabel. Da  $M$  metrisierbar ist, erfüllt  $M$  das zweite Abzählbarkeitsaxiom, und die Proposition ist bewiesen.

///

## Literatur

- [Ah] Ahlfors, L.V., (1979) Complex Analysis, McGraw-Hill, New York.
- [ASa] Ahlfors, L.V., Sario, L., (1960) Riemann surfaces, Princeton University Press.
- [FaKr] Farkas, H.M., Kra, I., (1992) Riemann Surfaces, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.
- [F] Forster, O., (1980) Lectures on Riemann surfaces, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.
- [GT] Gilbarg, D., Trudinger, N.S., (1998) Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer Verlag, 3.Auflage, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo.
- [GrHa] Griffiths, P.A., Harris, J., (1978) Principles of algebraic geometry, Wiley-Intersciences, New York.
- [Jo] Jost, J., (2006) Compact Riemann surfaces, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.
- [M] Milnor, J., (1965) Topology from the differentiable viewpoint, The University Press of Virginia, Charlottesville.
- [Ru] Rudin, W.T., (1966) Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New York.
- [S] Sard, A., (1942) The measure of the critical values of differentiable maps, Bulletin of the American Mathematical Society, **48**, pp. 883-890.
- [Sch-a] Schätzle, R., (2021) Analysis III, Vorlesungsskript Universität Tübingen.
- [Sch-b] Schätzle, R., (2022) Analysis IV, Vorlesungsskript Universität Tübingen.
- [Sch-c] Schätzle, R., (2022) Einführung in partielle Differentialgleichungen, Vorlesungsskript Universität Tübingen.
- [Sp] Spanier, E.H., (1966) Algebraic Topology, McGraw-Hill.
- [St] Strebel, K., (1980) Vorlesungen über Riemannsche Flächen, Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen und Zürich.