Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. S. Eichmann

21.04.20

Masstheoretische Methoden
SS 2020
1.Übung

AUFGABE 1:
Es sei μ ein reguläres Maß auf X , und $A_k \subseteq A_{k+1} \subseteq X$. Zeigen Sie

$$\mu(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

AUFGABE 2:
μ sei ein Maß auf X. Zeigen Sie, daß zu keiner nicht $\mu-$meßbaren Menge $A \subseteq X$ mit $\mu(A) < \infty$ eine $\mu-$meßbare Menge $S \subseteq A$ mit $\mu(S) = \mu(A)$ existiert.
(Hinweis: Zeigen Sie $\mu(A - S) = 0$ für solches S .)

Abgabetermin ist Dienstag, 28.04.20.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. S. Eichmann

28.04.20

Masstheoretische Methoden
SS 2020
2.Übung

AUFGABE 3:
Es sei μ ein Borel-Maß oder ein reguläres Maß auf einem metrischen Raum. Zeigen Sie, daß für $\varrho > 0$ die Funktion $\varphi_\varrho : X \to [0, \infty]$ mit

$$\varphi_\varrho(x) := \mu(B_\varrho(x))$$

unterhalbstetig ist, also insbesondere borelmeßbar ist.

AUFGABE 4:
Es sei μ ein Maß auf einem separablen metrischen Raum X . Zeigen Sie

$$\mu(X - spt\ \mu) = 0.$$

(Hinweis: Verwenden Sie, dass X das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.)

Abgabetermin ist Dienstag, 05.05.20.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. S. Eichmann

05.05.20

Masstheoretische Methoden
SS 2020
3.Übung

AUFGABE 5:
Es sei $X := \sum_{i\in I} \mathbb{R} = \{(x,i) \mid x \in \mathbb{R}, i \in I\ \}$ die topologische Summe reeller Achsen bezüglich einer Indexmenge I, insbesondere ist X ein metrischer Raum. Für $A \subseteq X, i \in I$ schreiben wir $A_i := A \cap (\mathbb{R} \times \{i\})$ und definieren

$$\mu(A) := \sum_{i\in I} \mathcal{L}^1(A_i).$$

Verifizieren Sie, daß μ ein borelreguläres Maß auf X ist. Geben Sie für überabzählbares I eine abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ an, für die

$$\mu(A) < \inf_{U \supseteq A \text{ offen}} \mu(U).$$

AUFGABE 6: (Überdeckungssatz von Vitali, endliche Version)
Es sei $\mathcal{F}$ eine endliche Familie von abgeschlossenen, nichtdegenerierten Bällen in einem metrischen Raum X. Dann existiert eine disjunkte Unterfamilie $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ mit

$$\cup_{B\in\mathcal{F}} B \subseteq \cup_{B'\in\mathcal{G}} \tilde{B}',$$

wobei $\tilde{B}'$ einen abgeschlossenen Ball mit dreifachem Radius und gleichem Zentrum wie B' bezeichnet.

Abgabetermin ist Dienstag, 12.05.20.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. S. Eichmann

12.05.20

Masstheoretische Methoden
SS 2020
4.Übung

AUFGABE 7:

Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von abgeschlossenen, nichtdegenerierten Bällen im $\mathbb{R}^n$ mit beschränkten Radien, A sei die Zentrenmenge von $\mathcal{F}$, und μ sei ein Radon-Maß auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, es existiert eine paarweise disjunkte Teilfamilie $\mathcal{G}$ von $\mathcal{F}$ mit

$$\mu(A \cap \bigcup \mathcal{G}) \geq c_0 \mu(A),$$

wobei $c_0 = c_0(n) > 0$ nur von n abhängt.
(Hinweis: Verwenden Sie den Überdeckungssatz von Besicovitch.)

AUFGABE 8:

Es sei μ Radon-Maß auf $\mathbb{R}^n$ und f eine $\mu-$meßbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Die Maximalfunktion von f bezüglich μ ist definiert durch

$$(M_\mu f)(x) := \sup_{\varrho > 0} \mu(B_\varrho(x))^{-1} \int\limits_{B_\varrho(x)} |f| \, \mathrm{d}\mu$$

und weiter sei

$$(T_{\mu,\varrho} f)(x) := \mu(B_\varrho(x))^{-1} \int\limits_{B_\varrho(x)} |f - f(x)| \, \mathrm{d}\mu,$$

$$(T_\mu f)(x) := \limsup_{\varrho \to 0} \, (T_{\mu,\varrho} f)(x)$$

für $x \in spt \ \mu$. Zeigen Sie

$$\mu(M_\mu f > t) \leq C_n t^{-1} \parallel f \parallel_{L^1(\mu)} .$$

Zeigen Sie weiter für $h = f - g, g \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$,

$$T_\mu f \leq M_\mu h + |h|$$

und schließen Sie für $f \in L^1(\mu)$, daß $\mu-$fast alle $x \in X$ Lebesguepunkte von f.
(Hinweis: Verwenden Sie den Überdeckungssatz von Besicovitch und, daß $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ in $L^1(\mu)$ dicht liegt.)

Abgabetermin ist Dienstag, 19.05.20.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. S. Eichmann 19.05.20

Masstheoretische Methoden
SS 2020
5.Übung

AUFGABE 9:
Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ borel-meßbar und für $x \in \mathbb{R}^n$, $\varrho > 0$ sei

$$f_{x,\varrho}(y) := f(x + \varrho y).$$

Zeigen Sie für Borelmengen $A \subseteq \{x \in B_1(0) \mid \exists 0 < \varrho < 1 : \| f_{x,\varrho} \|_{L^1(B_1(0))} \leq \delta \}$, daß

$$\| f \|_{L^1(A)} \leq C_n \delta.$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Überdeckungssatz von Besicovitch.)

AUFGABE 10:
Es sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ und

$$F(x) := \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

wobei $\int_0^x = -\int_x^0$ für $x \leq 0$. Zeigen Sie F ist differenzierbar in allen Lebesguepunkten x von f , und dort gilt

$$F'(x) = f(x).$$

Abgabetermin ist Dienstag, 26.05.20.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. S. Eichmann

26.05.20

Masstheoretische Methoden
SS 2020
6.Übung

AUFGABE 11:
Es seien μ, ν Borel-Maße auf einem topologischen Raum X und $\nu(X) < \infty$.
Zeigen Sie $\nu \ll \mu$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall B \subseteq X \text{ Borelmenge} : \mu(B) < \delta \Longrightarrow \nu(B) < \varepsilon.$$

AUFGABE 12:
Es sei μ das Radon-Maß auf $\mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\mu(A) := \mathcal{L}^1(\{t \in \mathbb{R} \mid (t,0) \in A \}) \quad \text{für } A \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Berechnen Sie $D_\mu \mathcal{L}^2$.

Abgabetermin ist Dienstag, 09.06.20.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. S. Eichmann 09.06.20

Masstheoretische Methoden
SS 2020
7.Übung

AUFGABE 13: (Satz von Lebesgue)
Zeigen Sie, daß jede monoton nichtfallende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fast überall differenzierbar mit $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ist und

$$f(y-) = f(x-) + \int_x^y f'(t) \mathrm{d}t + \nu_s([x,y[)$$

für $x < y$, wobei $f(x-) := \lim_{t \uparrow x} f(t)$ der linksseitige Limes ist und ν_s ein zu $\mathcal{L}^1$ singuläres Radon-Maß ist. Zeigen Sie weiter, daß f das Integral über seine Ableitung ist, d.h. $\nu_s = 0$, falls f stetig ist und außerhalb einer abzählbaren Menge differenzierbar ist.
(Hinweis: Wenden Sie den Differentiationssatz für Radon-Maße auf $\mathcal{L}^1$ und ν mit $\nu(]x,y[) = f(y-) - f(x+)$ an.)

AUFGABE 14:
Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lebesguemeßbar, und für $x_0 \in \mathbb{R}^n, \varrho > 0$ sei

$$f_{x_0,\varrho}(y) := f(x_0 + \varrho y) \quad \text{für } y \in B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, f ist approximativ stetig bei x_0 bezüglich $\mathcal{L}^n$, d.h.

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^n([|f - f(x_0)| \geq \varepsilon] \cap B_\varrho(x_0))}{\mathcal{L}^n(B_\varrho(x_0))} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0,$$

genau dann, wenn

$$f_{x_0,\varrho} \to f(x_0) \quad \text{im Maß bezüglich } \mathcal{L}^n \text{ auf } B_1(0),$$

und für $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$ ist x_0 ein Lebesguspunkt von f genau dann, wenn

$$f_{x_0,\varrho} \to f(x_0) \quad \text{in } L^p(B_1(0)).$$

Abgabetermin ist Dienstag, 16.06.20.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. S. Eichmann

16.06.20

Masstheoretische Methoden
SS 2020
8.Übung

AUFGABE 15:
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt absolutstetig auf kompakten Intervallen, wenn

$$\forall R, \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall - R < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_m < y_m < R :$$
$$\sum_{i=1}^{m} (y_i - x_i) < \delta \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon.$$

Zeigen Sie, eine monoton nichtfallende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist absolutstetig auf kompakten Intervallen genau dann, wenn das in der vorigen Aufgabe betrachtete Radon-Maß ν mit $\nu(]x,y[) = f(y) - f(x)$ absolutstetig bezüglich $\mathcal{L}^1$ ist.
(Hinweis: Verwenden Sie den Differentiationssatz für Radon-Maße.)

AUFGABE 16: (Sphärisches Maß)
Es sei X ein metrischer Raum, $0 \leq s < \infty, 0 < \delta \leq \infty$.

1. Für $A \subseteq X$ ist

$$\mathcal{S}^s_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{J} \alpha(s) \varrho_j^s \;\middle|\; A \subseteq \bigcup_{j=1}^{J} B_{\varrho_j}(x_j), 0 < \varrho_j \leq \delta, x_j \in X, J \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \right\},$$

wobei $\alpha(s) = \pi^{s/2}/\Gamma(\frac{s}{2}+1)$, mit $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, \mathrm{d}x$ und $\alpha(0) = 1$.

2. Das s-dimensionale sphärische Maß auf X ist für $A \subseteq X$ definiert durch

$$\mathcal{S}^s(A) := \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{S}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{S}^s_\delta(A).$$

Zeigen Sie folgende Aussagen für das sphärische Maß .

1. $\mathcal{S}^s$ ist ein borelreguläres Maß.
2. $\mathcal{S}^0$ ist das Zählmaß .
3. Für das Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^s$ gilt
$$\mathcal{H}^s \leq \mathcal{S}^s \leq 2^s \mathcal{H}^s.$$
4. Auf $\mathbb{R}^n$ gilt für alle $\delta > 0$
$$\mathcal{S}^n = \mathcal{S}^n_\delta = \mathcal{L}^n.$$

Abgabetermin ist Dienstag, 23.06.20.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle 23.06.20
Dr. S. Eichmann

Masstheoretische Methoden
SS 2020
9.Übung

AUFGABE 17:
X sei ein metrischer Raum. Zeigen Sie für kompaktes $K \subseteq X, 0 \leq s < \infty, 0 < \delta \leq \infty$, daß
$$\mathcal{H}^s_\delta(K) < \infty.$$
Geben Sie umgekehrt einen metrischen Raum X, kompaktes $K \subseteq X$ und $0 < s < \infty$ an, für das K nicht $\mathcal{H}^s - \sigma-$endlich ist.

AUFGABE 18:
Zeigen Sie für
$$A := [-2, 2] \times \{0\}, B := [-1, 1] \times \{1\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$
daß
$$\mathcal{H}^1_4(A) = 4, \mathcal{H}^1_4(B) = 2 \quad \text{und} \quad \mathcal{H}^1_4(A \cup B) = 4,$$
und schließen Sie, daß $\mathcal{H}^1_4$ kein Borel-Maß auf $\mathbb{R}^2$ ist.
(Hinweis: Verwenden Sie aus der Vorlesung $\mathcal{H}^1_4 = \mathcal{L}^1$ auf $\mathbb{R} \times \{t\} \cong \mathbb{R}$.)

Abgabetermin ist Dienstag, 30.06.20.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. S. Eichmann

30.06.20

Masstheoretische Methoden
SS 2020
10.Übung

AUFGABE 19:
Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen. Der Graph einer Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ ist definiert durch

$$graph\ \varphi := \{(y, \varphi(y)) \mid y \in \Omega\ \} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i)

$$\mathcal{H}^n(graph\ \varphi) \geq \mathcal{H}^n(\Omega) > 0$$

also insbesondere $dim_{\mathcal{H}}(graph\ \varphi) \geq n$.
(Hinweis: Verwenden Sie für $\mathcal{H}^n(\Omega) > 0$ Satz 6.1 wie am Anfang von §7 oder Aufgabe 16.)

(ii) Ist φ lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $\leq L$, so gilt

$$\mathcal{H}^n(graph\ \varphi) \leq (1+L)^n \mathcal{H}^n(\Omega) < \infty$$

also insbesondere $dim_{\mathcal{H}}(graph\ \varphi) \leq n$.

AUFGABE 20:
Es sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq s < n$ und

$$\Lambda_s := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \limsup_{\varrho \downarrow 0} \varrho^{-s} \int\limits_{B_\varrho(x)} |f| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n > 0\ \}.$$

Zeigen Sie, daß

$$\mathcal{H}^s(\Lambda_s) = 0.$$

Abgabetermin ist Dienstag, 07.07.20.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. S. Eichmann

07.07.20

Masstheoretische Methoden
SS 2020
11.Übung

AUFGABE 21:
Es sei μ ein Radon-Maß auf $\mathbb{R}^n$ und für ein $0 < s < \infty$ gelte

$$0 < \theta^{*s}(\mu) < \infty \quad \text{fast überall bezüglich } \mu.$$

Zeigen Sie, daß $\mu = f\mathcal{H}^s$ für eine Borelfunktion $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ mit $[f > 0] = [0 < \theta^{*s}(\mu) < \infty]$.

AUFGABE 22:
Es sei $M \subseteq M_0 \cup \cup_{j=1}^{\infty} N_j \subseteq \mathbb{R}^m$ meßbar bezüglich $\mathcal{H}^n$ und $\mathcal{H}^n(M_0) = 0, N_j, j, n \in \mathbb{N}$, eingebettete $C^1 - n-$Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^m$, und $\mu := \theta\mathcal{H}^n\lfloor M$ für ein lokal $\mathcal{H}^n-$ integrierbares θ mit $\theta > 0$ auf M und $\theta = 0$ in $\mathbb{R}^m - M$.
Zeigen Sie

$$\theta^n(\mu) = \theta \quad \mathcal{H}^n - \text{fast überall in } \mathbb{R}^m.$$

Abgabetermin ist Dienstag, 14.07.20.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. S. Eichmann

14.07.20

Masstheoretische Methoden
SS 2020
12.Übung

AUFGABE 23: (Cantor-Menge)
Für ein Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}, a < b,$ und $0 < \gamma < 1/2$ definieren wir

$$\Phi_{\gamma,-}([a,b]) = [a, a + \gamma(b-a)], \quad \Phi_{\gamma,+}([a,b]) = [b - \gamma(b-a), b].$$

Damit definieren wir rekursiv

$$I_{0,1} := [0,1]$$

und für $n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, 2^{n-1}$

$$I_{n,2k-1} := \Phi_{\gamma,-}(I_{n-1,k}), \quad I_{n,2k} := \Phi_{\gamma,+}(I_{n-1,k}).$$

Wir setzen $C_n := \cup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}$ und die Cantormenge

$$C := \cap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen.

1. $\mathcal{L}^1(I_{n,k}) = \gamma^n$ für $n \in \mathbb{N}_0, k = 1, \ldots, 2^n$.
2. $\mathcal{L}^1(C_n) = 2^n \gamma^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathcal{L}^1(C) = 0$.
3. Für $\mu_n := (2\gamma)^{-n} \mathcal{L}^1 \lfloor C_n$ gilt
$$\mu_m(I_{n,k}) = 2^{-n} \quad \text{für } m \geq n, k = 1, \ldots, 2^n.$$
4. Für eine geeignete Teilfolge gilt $\mu_{n_l} \to \mu$ schwach* in $C_0([0,1])^*$ und $spt\ \mu \subseteq C$,
$$\mu(I_{n,k}) = 2^{-n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, 2^n.$$
5. $\mu(B_{\gamma^n}(x)) \leq 3 \cdot 2^{-n}$ für $n \in \mathbb{N}_0, x \in [0,1]$.
6. Für $0 < s = -\log 2 / \log \gamma < 1$ gilt
$$\theta^{*s}(\mu, x) \leq 6/\alpha(s) < \infty \quad \text{für alle } x \in [0,1].$$
7. $\mathcal{H}^s(C) \geq \alpha(s)/12 > 0$, also $dim_{\mathcal{H}} C \geq s$ und genauer
$$dim_{\mathcal{H}} C = s.$$

   (Hinweis: Verwenden Sie Satz 6.1 der Vorlesung.)

8. Setzen wir $C_\gamma = C$ in Abhängigkeit von γ und $C_* := \cup_{k=1}^{\infty} C_{1/2-1/k}$, so gilt

$$dim_{\mathcal{H}} C_* = 1, \quad \mathcal{L}^1(C_*) = 0.$$

AUFGABE 24: (Sphärisches Maß II)
Wir betrachten den metrischen Raum $l^\infty := \{(x_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \mid \sup_j |x_j| < \infty \}$ mit der Norm $\| (x_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \|_{l^\infty} := \sup_j |x_j|$ und dem Shift-Operator $T : l^\infty \to l^\infty$ mit $T(x_j)_{j\in\mathbb{N}_0} := (0, x_0, x_1, \ldots)$ und wählen $0 < \gamma < 1/2, 0 < s = -\log 2/\log\gamma < 1$. Für $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \{\pm 1\}$ setzen wir $x_\varphi := (\varphi(j)\gamma^j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ und

$$A := \{x_\varphi \mid \varphi : \mathbb{N}_0 \to \{\pm 1\} \} \subseteq l^\infty$$

und für $\psi : \{0, \ldots, n\} \to \{\pm 1\}$ setzen wir $x_\psi := (\psi(0)\gamma^0, \ldots, \psi(n)\gamma^n, 0, \ldots)$.
Zeigen Sie folgende Aussagen.

1. Für $\varphi \neq \varphi'$ gilt
$$\| x_\varphi - x_{\varphi'} \|_{l^\infty} = 2\gamma^n,$$
wobei $n = \min\{j \in \mathbb{N}_0 \mid \varphi(j) \neq \varphi'(j) \}$.

2. Es gilt
$$A \subseteq \bigcup_{\psi:\{0,\ldots,n\}\to\{\pm1\}} \bar{B}_{\gamma^{n+1}}(x_\psi),$$
also für $\delta > \gamma^{n+1}$
$$\mathcal{S}^s_\delta(A) \leq 2^{n+1}\alpha(s)\gamma^{s(n+1)} = \alpha(s)$$
und $\mathcal{S}^s(A) \leq \alpha(s)$.

3. Wir betrachten die Abbildung $f : A \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x_\varphi) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2}(\varphi(j) + 1)\gamma^j(1 - \gamma)$$
also mit der Notation aus der vorigen Aufgabe $f(x_\varphi) \in I_{0,1} = [0, 1]$ und wenn $f(x_\varphi) \in I_{n-1,k}, n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, 2^{n-1}$, so ist
$$f(x_\varphi) \in I_{n,2k-1} = \Phi_{\gamma,-}(I_{n-1,k}) \quad \text{für } \varphi(n) = -1,$$
$$f(x_\varphi) \in I_{n,2k} = \Phi_{\gamma,+}(I_{n-1,k}) \quad \text{für } \varphi(n) = 1.$$
Dann gilt $f(A) = C$ und
$$\frac{1-2\gamma}{2} \| x_\varphi - x_{\varphi'} \|_{l^\infty} \leq |f(x_\varphi) - f(x_{\varphi'})| \leq \frac{1}{2} \| x_\varphi - x_{\varphi'} \|_{l^\infty},$$
also
$$\mathcal{S}^s(A) \geq \mathcal{H}^s(A) \geq 2^s\mathcal{H}^s(C) > 0.$$
(Hinweis: Verwenden Sie die Aufgaben 16 und 22 und Proposition 4.3 der Vorlesung.)

4. Für $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \{\pm 1\}$ und $0 < \varrho \leq 2$ mit $2\gamma^n < \varrho \leq 2\gamma^{n-1}$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$B_\varrho(x_\varphi) \cap A = \bar{B}_{2\gamma^n}(x_\varphi) \cap A = x_{\varphi|\{0,\ldots,n-1\}} + \gamma^n T^n(A),$$

also

$$\mathcal{S}^s(B_\varrho(x_\varphi) \cap A) = \gamma^{sn} \mathcal{S}^s(A) \leq (\varrho/2)^s \mathcal{S}^s(A),$$

und die Abschätzung gilt für alle $\varrho > 0$.

5. Für $a_k \in A, \varrho_k > 0, K \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mit

$$A \subseteq \cup_{k=1}^K B_{\varrho_k}(a_k),$$

gilt

$$\sum_{k=1}^K \varrho_k^s \geq 2^s.$$

6. Für das sphärische Maß $\mathcal{S}_A^s$ auf dem metrischen Raum A gilt

$$\mathcal{S}_{A,\infty}^s(A) \geq \alpha(s) 2^s,$$

also $\mathcal{S}_A^s(A) > \mathcal{S}_{l^\infty}^s(A)$, und das sphärisches Maß hängt vom umgebenden metrischen Raum ab.

7. Für

$$B := A \cup \{x_\psi \mid \psi : \{0, \ldots, n\} \to \{\pm 1\}, n \in \mathbb{N}_0 \}$$

gilt $\mathcal{S}_B^s(B) \leq \alpha(s) < \mathcal{S}_A^s(A)$, also ist die Abbildung

$$M \mapsto \mathcal{S}_M^s(M) \quad \text{für } M \in \mathcal{P}(l^\infty)$$

nicht monoton und insbesondere kein Maß auf l^∞ .
(Hinweis: Beachten Sie 2.) und , daß $\{x_\psi \mid \psi : \{0, \ldots, n\} \to \{\pm 1\}, n \in \mathbb{N}_0 \}$ abzählbar ist und $s > 0$.)

AUFGABE 25:

Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Zeigen Sie, daß eine Funktion $u \in L^\infty(\Omega)$ genau dann lipschitzstetig mit

$$Lip\ u \leq M$$

ist, wenn

$$\Big| \int_\Omega u D\varphi \Big| \leq M \parallel \varphi \parallel_{L^1(\Omega)}$$

für alle $\varphi \in C_0^1(\Omega)$.
(Hinweis: Definieren Sie $u_\varepsilon(x) := \int_\Omega \lambda_\varepsilon(x-y) u(y) \mathrm{d}y$.)

Bearbeiten Sie zwei der drei Aufgaben.
Abgabetermin ist Dienstag, 21.07.20.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. S. Eichmann 21.07.20

Masstheoretische Methoden
SS 2020
13.Übung

AUFGABE 26:
Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lokal lipschitzstetig. Zeigen Sie, daß $Df(x) = 0$ für $\mathcal{L}^n-$fast alle $x \in [f = 0]$.

AUFGABE 27:
Für $f \in C^1_{loc}(\mathbb{R}^n), x \neq y \in \mathbb{R}^n$ sei

$$R(y, x) := \frac{f(y) - f(x) - Df(x)(y - x)}{|x - y|}$$

und für $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $\delta > 0$ sei

$$\varrho_{K,f,Df}(\delta) := \sup\{|R(y, x)| \mid x, y \in K, 0 < |x - y| \leq \delta \}.$$

Zeigen Sie $\varrho_{K,f,Df}(\delta) \to 0$ für $\delta \to 0$, d.h. die Voraussetzung im Erweiterungssatz von Whitney ist auch notwendig.

Keine Abgabe.