Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. N. Jork

24.10.24

Masstheoretische Methoden
WS 2024/25
1.Übung

AUFGABE 1:
μ sei ein Maß auf X. Zeigen Sie, daß zu keiner nicht $\mu-$meßbaren Menge $S \subseteq X$ mit $\mu(S) < \infty$ eine $\mu-$meßbare Menge $A \subseteq S$ mit $\mu(S) = \mu(A)$ existiert.
(Hinweis: Zeigen Sie $\mu(S - A) = 0$ für solches A .)

AUFGABE 2:
μ sei ein Maß auf X und $A \in \mathcal{A}_\mu$. Zeigen Sie $\chi_A\mu \geq \mu\lfloor A$ und für reguläres μ , dass

$$\chi_A\mu = \mu\lfloor A.$$

Abgabetermin ist Donnerstag, 31.10.24.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. N. Jork 31.10.24

Masstheoretische Methoden
WS 2024/25
2.Übung

AUFGABE 3:
μ sei ein borelreguläres Maß auf X , $f : X \to [0, \infty]$ sei $\mu-$meßbar und $[f > 0]$ eine $\sigma-$endliche Menge bezüglich μ oder f sei borelmeßbar.

Zeigen Sie

$$(f\mu)(S) = \inf_{B \supseteq S \text{ Borelmenge}} \int_B f \, \mathrm{d}\mu \quad \forall S \subseteq X,$$

also ist $f\mu$ borelregulär. Insbesondere ist für $A \subseteq X$ meßbar und $\sigma-$endlich bezüglich μ oder $A \subseteq X$ eine Borelmenge das Mass $\mu \lfloor A = \chi_A \mu$ borelregulär.
(Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 2.)

AUFGABE 4:
Es sei μ ein reguläres Maß auf X , und $A_k \subseteq A_{k+1} \subseteq X$. Zeigen Sie

$$\mu(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k).$$

AUFGABE 5:
Es sei μ ein Borel-Maß oder ein reguläres Maß auf einem metrischen Raum. Zeigen Sie, daß für $\varrho > 0$ die Funktion $\varphi_\varrho : X \to [0, \infty]$ mit

$$\varphi_\varrho(x) := \mu(B_\varrho(x))$$

unterhalbstetig ist, also insbesondere borelmeßbar ist.

Bearbeiten Sie zwei der drei Aufgaben.
Abgabetermin ist Donnerstag, 07.11.24.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. N. Jork

07.11.24

Masstheoretische Methoden
WS 2024/25
3.Übung

AUFGABE 6:
Let $X := \sum_{i \in I} \mathbb{R} = \{(x,i) \mid x \in \mathbb{R}, i \in I\}$ be the topological sum of real axes with respect to an index set I, in particular X is a metric space. For $A \subseteq X, i \in I$, we write $A_i := A \cap (\mathbb{R} \times \{i\})$ and define

$$\mu(A) := \sum_{i \in I} \mathcal{L}^1(A_i).$$

Verfiy that μ is a borelregular measure on X. Show for uncountable I that there is a closed set $A \subseteq X$ with

$$\mu(A) < \inf_{U \supseteq A \text{ offen}} \mu(U).$$

AUFGABE 7: (Vitali's covering theorem, finite version)
Let $\mathcal{F}$ be a finite family of closed, non-degenerate balls in a metric space X. Show that there exists a pairwise disjoint subfamily $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ with

$$\cup_{B \in \mathcal{F}} B \subseteq \cup_{B' \in \mathcal{G}} \tilde{B}',$$

where $\tilde{B}'$ denotes a closed ball with three times the radius and same center as B'.

Abgabetermin ist Donnerstag, 14.11.24.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. N. Jork

14.11.24

Masstheoretische Methoden
WS 2024/25
4.Übung

AUFGABE 8:
Let $\mathcal{F}$ be a family of closed, non-degenerate balls in $\mathbb{R}^n$ with bounded radii, let A be the center set of $\mathcal{F}$ and μ be a radon measure on $\mathbb{R}^n$. Show there exists a pairwise disjoint subfamily $\mathcal{G}$ von $\mathcal{F}$ with

$$\mu(A \cap \bigcup \mathcal{G}) \geq c_0 \mu(A),$$

where $c_0 = c_0(n) > 0$ only depends on n .
(Hinweis: Use Besicovitch's covering theorem.)
AUFGABE 9:
Let μ be a Radon measure on $\mathbb{R}^n$ and f be a $\mu-$measurable function on $\mathbb{R}^n$. The maximal function of f with respect to μ is defined by

$$(M_\mu f)(x) := \sup_{\varrho > 0} \mu(B_\varrho(x))^{-1} \int\limits_{B_\varrho(x)} |f| \, \mathrm{d}\mu,$$

and we further put

$$(T_{\mu,\varrho} f)(x) := \mu(B_\varrho(x))^{-1} \int\limits_{B_\varrho(x)} |f - f(x)| \, \mathrm{d}\mu,$$

$$(T_\mu f)(x) := \limsup_{\varrho \to 0} \, (T_{\mu,\varrho} f)(x)$$

for $x \in spt \ \mu$. Show

$$\mu(M_\mu f > t) \leq C_n t^{-1} \parallel f \parallel_{L^1(\mu)} .$$

Further show for $h = f - g, g \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$, that

$$T_\mu f \leq M_\mu h + |h|$$

and conclude for $f \in L^1(\mu)$ that $\mu-$almost all $x \in X$ are Lebesgue pojnts of f .
(Hinweis: Use Besicovitch's covering theorem and that $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ in $L^1(\mu)$ is dense.)

Abgabetermin ist Donnerstag, 21.11.24.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle 21.11.24
Dr. N. Jork

Masstheoretische Methoden
WS 2024/25
5.Übung

AUFGABE 10:
Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be Borel measurable and for $x \in \mathbb{R}^n$, $\varrho > 0$ let

$$f_{x,\varrho}(y) := f(x + \varrho y).$$

Show for any Borel set $A \subseteq \{x \in B_1(0) \mid \exists 0 < \varrho < 1 : \| f_{x,\varrho} \|_{L^1(B_1(0))} \leq \delta \}$ that

$$\| f \|_{L^1(A)} \leq C_n \delta.$$

(Hinweis: Use Besicovitch's covering theorem.)

AUFGABE 11:
Let $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ and

$$F(x) := \int_0^x f(t) \, dt \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

where $\int_0^x = -\int_x^0$ für $x \leq 0$. Show F is differentiable in all Lebesgue points x of f with

$$F'(x) = f(x).$$

Abgabetermin ist Donnerstag, 28.11.24.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. N. Jork

28.11.24

Masstheoretische Methoden
WS 2024/25
6.Übung

AUFGABE 12:
Let μ, ν be Borel measures on a topological space X with $\mu(X) < \infty$. Show that $\nu \ll \mu$, if and only if

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall B \subseteq X \text{ Borel set} : \mu(B) < \delta \Longrightarrow \nu(B) < \varepsilon.$$

AUFGABE 13:
Let μ be the Radon measure on $\mathbb{R}^2$ defined by

$$\mu(A) := \mathcal{L}^1(\{t \in \mathbb{R} \mid (t, 0) \in A\}) \quad \text{für } A \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Calculate $D_\mu \mathcal{L}^2$.

Abgabetermin ist Donnerstag, 05.12.24.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. N. Jork 05.12.24

Masstheoretische Methoden
WS 2024/25
7.Übung

AUFGABE 14: (Theorem of Lebesgue)
Show that any monotonically non-decreasing function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is differenatiable almost everywhere with $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ and

$$f(y-) = f(x-) + \int_x^y f'(t)\mathrm{d}t + \nu_s([x, y[)$$

for $x < y$, where $f(x-) := \lim_{t\uparrow x} f(t)$ is the left hand limit and ν_s is a Radon measure such that ν_s and $\mathcal{L}^1$ are mutually singlur to each other.

Further show that f is the integral of its derivative, that is $\nu_s = 0$, if f is continuous and differentiable outside a counable set.
(Hinweis: Use the differentiation theorem for Radon measures for $\mathcal{L}^1$ and ν with $\nu(]x, y[) = f(y-) - f(x+)$.)

AUFGABE 15:
Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be lebesgue measurable and for $x_0 \in \mathbb{R}^n, \varrho > 0$ put

$$f_{x_0,\varrho}(y) := f(x_0 + \varrho y) \quad \text{für } y \in B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Show that f is approximatively continuous in x_0 with respect to $\mathcal{L}^n$, that is

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^n([|f - f(x_0)| \geq \varepsilon] \cap B_\varrho(x_0))}{\mathcal{L}^n(B_\varrho(x_0))} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0,$$

if and only if

$$f_{x_0,\varrho} \to f(x_0) \quad \text{in measure with respect to } \mathcal{L}^n \text{ on } B_1(0),$$

and show further for $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$ that x_0 is a Lebesgue point of f , if and only if

$$f_{x_0,\varrho} \to f(x_0) \quad \text{in } L^p(B_1(0)).$$

Abgabetermin ist Donnerstag, 12.12.24.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle 12.12.24
Dr. N. Jork

Masstheoretische Methoden
WS 2024/25
8.Übung

AUFGABE 16:
A function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is called absolutely continuous on compact intervals, if

$$\forall R, \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall -R < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_m < y_m < R :$$
$$\sum_{i=1}^{m} (y_i - x_i) < \delta \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon.$$

Show, a monotonically non-decreasing function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is absolutely continuous on compact intervals, if and only if the Radon measure ν with $\nu(]x, y[) = f(y-) - f(x+)$ in exercise 14 is absolutely continuous with respect to $\mathcal{L}^1$.
(Hint: Use the differentiation theorem for Radon measures.)
AUFGABE 17: (Spherical measure)
Let X be a mteric space, $0 \leq s < \infty, 0 < \delta \leq \infty$.

1. For $A \subseteq X$ put
$$\mathcal{S}^s_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{J} \alpha(s) \varrho_j^s \;\middle|\; A \subseteq \bigcup_{j=1}^{J} B_{\varrho_j}(x_j), 0 < \varrho_j \leq \delta, x_j \in X, J \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \right\},$$
where $\alpha(s) = \pi^{s/2} / \Gamma(\frac{s}{2} + 1)$, with $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \,\mathrm{d}x$ and $\alpha(0) = 1$.
2. The s-dimensional spherical measure on X is defined for $A \subseteq X$ by
$$\mathcal{S}^s(A) := \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{S}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{S}^s_\delta(A).$$

Show the following assertions for the spherical measure.

1. $\mathcal{S}^s$ is a borelregular measure.
2. $\mathcal{S}^0$ ist the counting measure.
3. For the Hausdorff measure $\mathcal{H}^s$, it holds
$$\mathcal{H}^s \leq \mathcal{S}^s \leq 2^s \mathcal{H}^s.$$
4. On $\mathbb{R}^n$, it holds for all $\delta > 0$ that
$$\mathcal{S}^n = \mathcal{S}^n_\delta = \mathcal{L}^n.$$

Abgabetermin ist Donnerstag, 19.12.24.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. N. Jork

19.12.24

Masstheoretische Methoden
WS 2024/25
9.Übung

AUFGABE 18:
Let X be a metric space. Show for compact $K \subseteq X, 0 \leq s < \infty, 0 < \delta \leq \infty$ that

$$\mathcal{H}^s_\delta(K) < \infty.$$

Conversely give an example of a metric space X, a compact $K \subseteq X$ and $0 < s < \infty$, such that K is not $\mathcal{H}^s - \sigma-$finite.

AUFGABE 19:
Show for

$$A := [-2, 2] \times \{0\}, B := [-1, 1] \times \{1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

that

$$\mathcal{H}^1_4(A) = 4, \mathcal{H}^1_4(B) = 2 \quad \text{und} \quad \mathcal{H}^1_4(A \cup B) = 4,$$

and conclude that $\mathcal{H}^1_4$ is not a Borel measure on $\mathbb{R}^2$.
(Hint: Use from the lecture that $\mathcal{H}^1_4 = \mathcal{L}^1$ on $\mathbb{R} \times \{t\} \cong \mathbb{R}$.)

Abgabetermin ist Donnerstag, 09.01.25.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. N. Jork

09.01.25

Masstheoretische Methoden
WS 2024/25
10.Übung

AUFGABE 20:
Let $\emptyset \neq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ be open. The graph of a function $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ is given by

$$graph\ \varphi := \{(y, \varphi(y)) \mid y \in \Omega\ \} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}.$$

Show the following assertions.

(i)

$$\mathcal{H}^n(graph\ \varphi) \geq \mathcal{H}^n(\Omega) > 0$$

in particular $dim_{\mathcal{H}}(graph\ \varphi) \geq n$.
(Hinweis: For proving $\mathcal{H}^n(\Omega) > 0$ use Theorem 6.1 as at the beginning of §7 or exercise 17.)

(ii) If φ is lipschitz with Lipschitz constant $\leq L$, then

$$\mathcal{H}^n(graph\ \varphi) \leq (1+L)^n \mathcal{H}^n(\Omega) < \infty$$

in particular $dim_{\mathcal{H}}(graph\ \varphi) \leq n$.

AUFGABE 21:
Let $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq s < n$ and

$$\Lambda_s := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \limsup_{\varrho \downarrow 0} \varrho^{-s} \int\limits_{B_\varrho(x)} |f|\ \mathrm{d}\mathcal{L}^n > 0\ \}.$$

Show

$$\mathcal{H}^s(\Lambda_s) = 0.$$

Abgabetermin ist Donnerstag, 16.01.25.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. N. Jork

16.01.25

Masstheoretische Methoden
WS 2024/25
11.Übung

AUFGABE 22:

Let μ be a Radon measure on $\mathbb{R}^n$ which satisfies for some $0 < s < \infty$ that

$$0 < \theta^{*s}(\mu) < \infty \quad \text{fast überall bezüglich } \mu.$$

Show $\mu = f\mathcal{H}^s$ for a borelmeasurable function $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ with $[f > 0] = [0 < \theta^{*s}(\mu) < \infty]$.

AUFGABE 23:

Let $M \subseteq M_0 \cup \cup_{j=1}^{\infty} N_j \subseteq \mathbb{R}^m$ be measurable with respect to $\mathcal{H}^n$ and $\mathcal{H}^n(M_0) = 0, N_j, j, n \in \mathbb{N}$, embedded $C^1 - n-$submanifolds in $\mathbb{R}^m$, and $\mu := \theta\mathcal{H}^n\lfloor M$ for a locallly $\mathcal{H}^n -$ integrable θ with $\theta > 0$ on M and $\theta = 0$ in $\mathbb{R}^m - M$. Show

$$\theta^n(\mu) = \theta \quad \mathcal{H}^n - \text{almost everywhere in } \mathbb{R}^m.$$

Abgabetermin ist Donnerstag, 23.01.25.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. N. Jork 23.01.25

Masstheoretische Methoden
WS 2024/25
12.Übung

AUFGABE 24: (Cantor set)
For an interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}, a < b,$ and $0 < \gamma < 1/2$, we put

$$\Phi_{\gamma,-}([a,b]) = [a, a + \gamma(b-a)], \quad \Phi_{\gamma,+}([a,b]) = [b - \gamma(b-a), b].$$

We define recursively

$$I_{0,1} := [0,1]$$

and for $n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, 2^{n-1}$

$$I_{n,2k-1} := \Phi_{\gamma,-}(I_{n-1,k}), \quad I_{n,2k} := \Phi_{\gamma,+}(I_{n-1,k}).$$

We put $C_n := \cup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}$ and the Cantor set

$$C := \cap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Show the following assertions.

1. $\mathcal{L}^1(I_{n,k}) = \gamma^n$ for $n \in \mathbb{N}_0, k = 1, \dots, 2^n$.
2. $\mathcal{L}^1(C_n) = 2^n \gamma^n$ for $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathcal{L}^1(C) = 0$.
3. For $\mu_n := (2\gamma)^{-n} \mathcal{L}^1 \lfloor C_n$, it holds
$$\mu_m(I_{n,k}) = 2^{-n} \quad \text{for } m \geq n, k = 1, \dots, 2^n.$$
4. For an appropriate subsequence, it holds $\mu_{n_l} \to \mu$ weakly* in $C_0([0,1])^*$ and $spt\ \mu \subseteq C$,
$$\mu(I_{n,k}) = 2^{-n} \quad \text{for } n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, 2^n.$$
5. $\mu(B_{\gamma^n}(x)) \leq 3 \cdot 2^{-n}$ for $n \in \mathbb{N}_0, x \in [0,1]$.
6. For $0 < s = -\log 2 / \log \gamma < 1$, it holds
$$\theta^{*s}(\mu, x) \leq 6/\alpha(s) < \infty \quad \text{for all } x \in [0,1].$$
7. $\mathcal{H}^s(C) \geq \alpha(s)/12 > 0$, hence $dim_{\mathcal{H}} C \geq s$ and more precisely
$$dim_{\mathcal{H}} C = s.$$

(Hinweis: Use Theorem 6.1 of the lecture.)

8. Putting $C_\gamma = C$ depending on γ and $C_* := \cup_{k=1}^\infty C_{1/2-1/k}$, it holds

$$dim_{\mathcal{H}} C_* = 1, \quad \mathcal{L}^1(C_*) = 0.$$

AUFGABE 25: (Spherical measure II)
We consider the metric space $l^\infty := \{(x_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \mid \sup_j |x_j| < \infty \}$ with the norm $\| (x_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \|_{l^\infty} := \sup_j |x_j|$ and the Shift Operator $T : l^\infty \to l^\infty$ with $T(x_j)_{j\in\mathbb{N}_0} := (0, x_0, x_1, \ldots)$ and choose $0 < \gamma < 1/2, 0 < s = -\log 2/\log\gamma < 1$. For $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \{\pm 1\}$, we put $x_\varphi := (\varphi(j)\gamma^j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ and

$$A := \{x_\varphi \mid \varphi : \mathbb{N}_0 \to \{\pm 1\} \} \subseteq l^\infty$$

and for $\psi : \{0, \ldots, n\} \to \{\pm 1\}$, we put $x_\psi := (\psi(0)\gamma^0, \ldots, \psi(n)\gamma^n, 0, \ldots)$.
Show the following assertions.

1. For $\varphi \neq \varphi'$, it holds
$$\| x_\varphi - x_{\varphi'} \|_{l^\infty} = 2\gamma^n$$
where $n = \min\{j \in \mathbb{N}_0 \mid \varphi(j) \neq \varphi'(j) \}$.

2. It holds
$$A \subseteq \bigcup_{\psi:\{0,\ldots,n\}\to\{\pm 1\}} \bar{B}_{\gamma^{n+1}}(x_\psi),$$
hence for $\delta > \gamma^{n+1}$
$$\mathcal{S}^s_\delta(A) \leq 2^{n+1}\alpha(s)\gamma^{s(n+1)} = \alpha(s)$$
and $\mathcal{S}^s(A) \leq \alpha(s)$.

3. We consider the map $f : A \to \mathbb{R}$ with
$$f(x_\varphi) := \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{2}(\varphi(j) + 1)\gamma^j(1-\gamma),$$
hence in the notion of the preceeding exercise $f(x_\varphi) \in I_{0,1} = [0,1]$ and if $f(x_\varphi) \in I_{n-1,k}, n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, 2^{n-1}$, then
$$\begin{aligned} f(x_\varphi) \in I_{n,2k-1} = \Phi_{\gamma,-}(I_{n-1,k}) &\quad \text{for } \varphi(n) = -1, \\ f(x_\varphi) \in I_{n,2k} = \Phi_{\gamma,+}(I_{n-1,k}) &\quad \text{for } \varphi(n) = 1. \end{aligned}$$
Then it holds $f(A) = C$ and
$$\frac{1-2\gamma}{2} \| x_\varphi - x_{\varphi'} \|_{l^\infty} \leq |f(x_\varphi) - f(x_{\varphi'})| \leq \frac{1}{2} \| x_\varphi - x_{\varphi'} \|_{l^\infty},$$
hence
$$\mathcal{S}^s(A) \geq \mathcal{H}^s(A) \geq 2^s\mathcal{H}^s(C) > 0.$$
(Hint: Use the exercises 17 und 22 and Proposition 4.3 of the lecture.)

4. For $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \{\pm 1\}$ and $0 < \varrho \leq 2$ with $2\gamma^n < \varrho \leq 2\gamma^{n-1}$ with $n \in \mathbb{N}$, it holds
$$B_\varrho(x_\varphi) \cap A = \bar{B}_{2\gamma^n}(x_\varphi) \cap A = x_{\varphi|\{0,\ldots,n-1\}} + \gamma^n T^n(A),$$
hence
$$\mathcal{S}^s(B_\varrho(x_\varphi) \cap A) = \gamma^{sn}\mathcal{S}^s(A) \leq (\varrho/2)^s \mathcal{S}^s(A),$$
and the exstimate holds for all $\varrho > 0$.

5. For $a_k \in A, \varrho_k > 0, K \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ with
$$A \subseteq \cup_{k=1}^K B_{\varrho_k}(a_k),$$
it holds
$$\sum_{k=1}^K \varrho_k^s \geq 2^s.$$

6. For the spherical measure $\mathcal{S}_A^s$ on the metric space A , it holds
$$\mathcal{S}_{A,\infty}^s(A) \geq \alpha(s)2^s,$$
hence $\mathcal{S}_A^s(A) > \mathcal{S}_{l^\infty}^s(A)$, and the spherical measure depends on the ambient metric space.

7. For
$$B := A \cup \{x_\psi \mid \psi : \{0,\ldots,n\} \to \{\pm 1\}, n \in \mathbb{N}_0 \},$$
it holds $\mathcal{S}_B^s(B) \leq \alpha(s) < \mathcal{S}_A^s(A)$, hence the map
$$M \mapsto \mathcal{S}_M^s(M) \quad \text{für } M \in \mathcal{P}(l^\infty)$$
is not monotone and in particular, it is not a measure on l^∞ .
(Hint: Observe 2.) and that $\{x_\psi \mid \psi : \{0,\ldots,n\} \to \{\pm 1\}, n \in \mathbb{N}_0 \}$ is countable and $s > 0$.)

AUFGABE 26:

Let $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ be open and convex. Show a function $u \in L^\infty(\Omega)$ is lipschitz continuous with
$$Lip\ u \leq M,$$
if and only if
$$\Big| \int_\Omega u D\varphi \Big| \leq M \parallel \varphi \parallel_{L^1(\Omega)}$$
for all $\varphi \in C_0^1(\Omega)$.
(Hint: Define $u_\varepsilon(x) := \int_\Omega \lambda_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y$.)

Bearbeiten Sie zwei der drei Aufgaben.
Abgabetermin ist Donnerstag, 30.01.25.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. N. Jork

30.01.25

Masstheoretische Methoden
WS 2024/25
13.Übung

AUFGABE 27:

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be locally lipschitz. Show that $Df(x) = 0$ for $\mathcal{L}^n-$almost all $x \in [f = 0]$.

AUFGABE 28:

For $f \in C^1_{loc}(\mathbb{R}^n), x \neq y \in \mathbb{R}^n$ let

$$R(y, x) := \frac{f(y) - f(x) - Df(x)(y - x)}{|x - y|}$$

and for $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compact, $\delta > 0$ let

$$\varrho_{K,f,Df}(\delta) := \sup\{|R(y, x)| \mid x, y \in K, 0 < |x - y| \leq \delta \}.$$

Show $\varrho_{K,f,Df}(\delta) \to 0$ for $\delta \to 0$, that is the assumptions of Whitney's extension theorem are also necessary.

Keine Abgabe.