

Partielle Einführung in Differentialgleichungen

Reiner Schätzle
Wintersemester 2026/27
Universität Tübingen

Inhaltsverzeichnis

I	Vorbereitungen	1
1	Typen von partiellen Differentialgleichungen	1
2	Harmonische Funktionen	9

Teil I

Vorbereitungen

1 Typen von partiellen Differentialgleichungen

1.1 Allgemeine partielle Differentialgleichungen

Eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung für eine unbekannte Funktion mehrerer Veränderlicher und ihren partiellen Ableitungen.

Definition 1.1 *Ein Ausdruck der Form*

$$F(D^k u, D^{k-1} u, \dots, u, x) = 0 \quad \text{für } x \in \Omega \quad (1.1)$$

mit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen,

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

gegeben und $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ unbekannt, heißt eine partielle Differentialgleichung k -ter Ordnung.

(1.1) heißt linear, falls es von der Form

$$\sum_{|\gamma| \leq k} a_\gamma(x) \partial^\gamma u = f(x)$$

ist.

(1.1) heißt semi-linear, falls es von der Form

$$\sum_{|\gamma|=k} a_\gamma(x) \partial^\gamma u + a_0(D^{k-1} u, \dots, u, x) = 0$$

ist.

(1.1) heißt quasi-linear, falls es von der Form

$$\sum_{|\gamma|=k} a_\gamma(D^{k-1} u, \dots, u, x) \partial^\gamma u + a_0(D^{k-1} u, \dots, u, x) = 0$$

ist.

(1.1) heißt voll nicht-linear, falls (1.1) nichtlinear von den Ableitungen höchster Ordnung abhängt.

Bildet $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $F : \mathbb{R}^{n^k \cdot m} \times \mathbb{R}^{n^{k-1} \cdot m} \times \dots \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$ ab, so heißt (1.1) ein System partieller Differentialgleichungen.

□

Beispiele:

- (i) Lineare Gleichungen

1. Laplace-Gleichung

$$\Delta u := \sum_{i=1}^n \partial_{ii} u = 0$$

oder Poisson-Gleichung

$$\Delta u = f$$

oder lineare elliptische Gleichung

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{ij} u + \sum_{i=1}^n b_i \partial_i u + cu = f \quad \text{mit } (a_{ij}) > 0.$$

2. Lineare Transport-Gleichung bzw. lineare hyperbolische Gleichung

$$\partial_t u - \sum_{i=1}^n b_i \partial_i u = 0.$$

3. Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = 0$$

oder lineare parabolische Gleichung

$$\partial_t u - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{ij} u - \sum_{i=1}^n b_i \partial_i u - cu = f \quad \text{mit } (a_{ij}) > 0.$$

4. Wellengleichung

$$\partial_{tt} u - \Delta u = 0.$$

(ii) Nichtlineare Gleichungen

1. Nichtlineare Laplace-Gleichung

$$\Delta u = f(u)$$

oder quasi-lineare elliptische Gleichung

$$a_{ij}(\cdot, u, \nabla u) \partial_{ij} u + b(\cdot, u, \nabla u) = 0 \quad \text{mit } (a_{ij}) > 0.$$

2. p -Laplace-Gleichung

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0.$$

3. Minimalflächengleichung

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) = 0.$$

4. Monge-Ampère-Gleichung

$$\det(D^2 u) = f.$$

5. Pucci-Gleichung

$$\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(D^2u) := \Lambda \sum_{\sigma_i > 0} \sigma_i + \lambda \sum_{\sigma_i < 0} \sigma_i = f,$$
$$\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^-(D^2u) := \lambda \sum_{\sigma_i > 0} \sigma_i + \Lambda \sum_{\sigma_i < 0} \sigma_i = f,$$

wobei $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ die Eigenwerte von D^2u entsprechend ihrer Vielfachheit sind und $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$. $\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^\pm$ heißen Pucci-Operatoren.

6. Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\partial_t u + H(\nabla u, x) = 0.$$

7. Skalare Erhaltungsgleichung bzw. nicht-lineare hyperbolische Gleichung

$$\partial_t u + \operatorname{div} \mathbf{F}(u) = 0.$$

8. Skalare Reaktions-Diffusions-Gleichung

$$\partial_t u - \Delta u = f(u)$$

oder quasi-lineare parabolische Gleichung

$$\partial_t u - a_{ij}(\cdot, u, \nabla u) \partial_{ij} u - b(\cdot, u, \nabla u) = 0 \quad \text{mit } (a_{ij}) > 0.$$

9. Poröse Medium-Gleichung

$$\partial_t u - \Delta(u^\gamma) = 0.$$

10. Nicht-lineare Wellengleichung

$$\partial_{tt} u - \Delta u = f(u),$$
$$\partial_{tt} u - \operatorname{div} a(\nabla u) = 0.$$

(iii) Spezielle Gleichungen und Systeme

1. Schrödinger-Gleichung

$$i\partial_t u + \Delta u = 0.$$

2. Korteweg-deVries-Gleichung

$$\partial_t u + u\partial_x u + \partial_{xxx} u = 0.$$

3. Maxwell'sche Gleichungen im Vakuum ohne Strom

$$\partial_t \vec{\mathbf{E}} = \operatorname{rot} \vec{\mathbf{B}},$$
$$\partial_t \vec{\mathbf{B}} = -\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}},$$
$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = \operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} = 0.$$

4. System von Erhaltungsgleichungen

$$\partial_t \mathbf{u} + \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{u}) = 0.$$

5. System von Reaktions-Diffusions-Gleichungen

$$\partial_t \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{u}).$$

6. Euler-Gleichung für inkompressible, inviscid Flüssigkeiten

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \nabla u &= -\nabla p, \\ \operatorname{div} u &= 0. \end{aligned}$$

7. Navier-Stokes-Gleichung für inkompressible, viskose Flüssigkeiten

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \nabla u - \Delta u &= -\nabla p, \\ \operatorname{div} u &= 0. \end{aligned}$$

Meistens tritt eine partielle Differentialgleichung oder System zusammen mit Randwerten auf. Die zentralen Fragen zu partiellen Differentialgleichung bzw. Randwertproblemen sind

- Existenz von Lösungen,
- Eindeutigkeit der Lösungen,
- Stetige Abhängigkeit der Lösung von den gegebenen Daten.

Nur in sehr wenigen Spezialfällen kann man Lösungen durch explizite Formeln darstellen. Daher sind die Existenzresultate meist von abstrakter Natur.

Darüberhinaus ist es oft schwierig, Existenz von klassischen Lösungen zu zeigen, d.h. von Lösungen mit stetigen partiellen Ableitungen bis zur Ordnung der Differentialgleichung.

Stattdessen wird zuerst Existenz sogenannter schwacher Lösungen gezeigt. Für die Laplace-Gleichung kann man klassische Lösungen $u \in C^2(\Omega)$ suchen, die

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{1.2}$$

erfüllen, oder schwache Lösungen $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, die

$$\int_{\Omega} u \Delta \varphi = 0 \tag{1.3}$$

für alle zweifach stetig differenzierbaren Funktionen φ mit kompaktem Träger in Ω .

An eine solche schwache Existenztheorie schließt sich eine Regularitätstheorie an, die zeigt, daß schwache Lösungen höhere Regularität besitzen, z.B. daß schwache Lösungen klassisch sind, oder im besten Fall, daß schwache Lösungen analytisch sind.

In obigem Beispiel zur Laplace-Gleichung besagt das Lemma von Weyl, daß $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, das (1.3) erfüllt, tatsächlich analytisch ist und (1.2) erfüllt.

1.2 Elliptische Gleichungen zweiter Ordnung

Der Hauptgegenstand unserer Darstellung sind elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Definition 1.2 Eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$F(D^2u, \nabla u, u, x) = 0, \quad (1.4)$$

$F : S(n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, wobei $S(n) \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ die Menge der symmetrischen Matrizen bezeichnet, heißt elliptisch, wenn

$$F(X, p, z, x) \geq F(Y, p, z, x) \quad \forall X \geq Y, p \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, x \in \Omega,$$

dabei meint $X \geq Y$, daß die symmetrische Matrix $X - Y$ nicht-negativ semi-definit ist. (1.4) heißt strikt elliptisch, falls

$$F(X, p, z, x) > F(Y, p, z, x) \quad \forall X \geq Y, X \neq Y, p \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, x \in \Omega,$$

andernfalls heißt (1.4) degeneriert elliptisch.

(1.4) heißt gleichmäßig elliptisch mit Elliptizitätskonstanten $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$, falls

$$\lambda \|Y\| \leq F(X + Y, p, z, x) - F(X, p, z, x) \leq \Lambda \|Y\|$$

für alle $Y \geq 0, X \in S(n), p \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, x \in \Omega$ mit $\|Y\| := \sup_{|a| \leq 1} |Ya|$.

Wir sagen auch, daß F elliptisch, strikt elliptisch bzw. gleichmäßig elliptisch.

□

Beispiele:

1. Die lineare partielle Differentialgleichung

$$a_{ij}(x) \partial_{ij} u + b_i(x) \partial_i u + c(x) u = f(x) \quad (1.5)$$

ist elliptisch genau dann, wenn

$$a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

(1.5) ist gleichmäßig elliptisch genau dann, wenn

$$\lambda I \leq (a_{ij}(x))_{ij} \leq \Lambda I \quad \text{für alle } x \in \Omega,$$

wobei $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$.

2. Die quasi-lineare partielle Differentialgleichung

$$a_{ij}(x, u, \nabla u) \partial_{ij} u + b(x, u, \nabla u) = 0. \quad (1.6)$$

ist elliptisch genau dann, wenn

$$a_{ij}(x, z, p) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega, z \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

(1.6) ist gleichmäßig elliptisch genau dann, wenn

$$\lambda I \leq (a_{ij}(x, z, p))_{ij} \leq \Lambda I \quad \text{für alle } x \in \Omega, z \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$.

Z.B. gilt für die Minimalflächengleichung

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i u \partial_j u}{1+|\nabla u|^2}\right)\partial_{ij} u = \partial_{ij} A(\nabla u)\partial_{ij} u, \quad (1.7)$$

wobei $A(p) := \sqrt{1+|p|^2}$. Daher ist (1.7) strikt elliptisch und gleichmäßig elliptisch für beschränkte Gradienten. (1.7) ist aber nicht gleichmäßig elliptisch für beliebige Gradienten.

3. Jedes $Y \in S(n)$ können wir eindeutig als $Y = Y^+ - Y^-$ mit $Y^+, Y^- \geq 0, Y^+ Y^- = 0$ schreiben. Ist F gleichmäßig elliptisch, so gilt $F(X + Y, \dots) = F(X + Y^+ - Y^-, \dots) \leq F(X - Y^-, \dots) + \Lambda \|Y^+\| \leq F(X, \dots) + \Lambda \|Y^+\| - \lambda \|Y^-\|$, also

$$F(X + Y, \dots) \leq F(X, \dots) + \Lambda \|Y^+\| - \lambda \|Y^-\|. \quad (1.8)$$

Umgekehrt folgt aus (1.8) folgt mit $Y \geq 0$, daß $F(X + Y, \dots) - F(X, \dots) \leq \Lambda \|Y\|$ und $F(X, \dots) - F(X + Y, \dots) = F(X + Y - Y, \dots) - F(X + Y, \dots) \leq -\lambda \|Y\|$, also $F(X + Y, \dots) - F(X, \dots) \geq \lambda \|Y\|$, und F ist gleichmäßig elliptisch.

4. Für die Pucci-Operatoren gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^-(X) &\leq \mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(X), \\ \mathcal{M}_{\lambda', \Lambda'}^-(X) &\leq \mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^-(X) \quad \text{für } \lambda' \leq \lambda \leq \Lambda \leq \Lambda', \\ \mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(X) &\leq \mathcal{M}_{\lambda', \Lambda'}^+(X) \quad \text{für } \lambda' \leq \lambda \leq \Lambda \leq \Lambda', \\ \mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^-(X) &= -\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(-X), \\ \mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^\pm(\alpha X) &= \alpha \mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^\pm(X) \quad \text{für } \alpha \geq 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \lambda \|Y\| &\leq \mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^-(Y) = \lambda \operatorname{tr}(Y) \leq n\lambda \|Y\| \quad \text{für } Y \geq 0, \\ \Lambda \|Y\| &\leq \mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(Y) = \Lambda \operatorname{tr}(Y) \leq n\Lambda \|Y\| \quad \text{für } Y \geq 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Beachten wir $\operatorname{tr}(AB) \geq 0$ für $A, B \geq 0$, so erhalten wir für $\lambda I \leq A \leq \Lambda I$, daß $\lambda \operatorname{tr}(X) \leq \operatorname{tr}(AX) \leq \Lambda \operatorname{tr}(X)$ für $X \geq 0$, also für beliebige $X \in S(n)$

$$\operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(AX^+) - \operatorname{tr}(AX^-) \leq \Lambda \operatorname{tr}(X^+) - \lambda \operatorname{tr}(X^-) = \mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(X).$$

Wählen wir eine orthogonale Matrix O mit $O^T X O = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ und $A = O \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) O^T$ mit $\lambda_i = \Lambda$ für $\sigma_i \geq 0$ und $\lambda_i = \lambda$ für $\sigma_i < 0$, so sehen wir $\lambda I \leq A \leq \Lambda I$ und

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(AX) &= \operatorname{tr}\left(O \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) O^T O \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) O^T\right) = \\ &= \operatorname{tr}\left(\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)\right) = \mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(X). \end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir

$$\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(X) = \sup_{\lambda I \leq A \leq \Lambda I} \text{tr}(AX), \quad \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-(X) = \inf_{\lambda I \leq A \leq \Lambda I} \text{tr}(AX). \quad (1.11)$$

Dies ergibt weiter

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(X) + \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-(Y) &\leq \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(X+Y) \leq \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(X) + \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(Y), \\ \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-(X) + \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-(Y) &\leq \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-(X+Y) \leq \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-(X) + \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-(Y), \end{aligned} \quad (1.12)$$

Kombinieren wir (1.10) und (1.12) so sehen wir für $Y \geq 0$

$$\lambda \|Y\| \leq \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-(Y) \leq \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^\pm(X+Y) - \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^\pm(X) \leq \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(Y) \leq n\Lambda \|Y\|,$$

und die Pucci-Operatoren sind gleichmäßig elliptisch mit Elliptizitätskonstanten $\lambda, n\Lambda$.

Umgekehrt folgt für gleichmäßig elliptisches F mit Elliptizitätskonstanten $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ aus (1.8) und (1.10)

$$\begin{aligned} F(X+Y, \dots) - F(X, \dots) &\leq \Lambda \|Y^+\| - \lambda \|Y^-\| \leq \\ &\leq \Lambda \text{tr}(Y^+) - (\lambda/n) \text{tr}(Y^-) = \mathcal{M}_{\lambda/n,\Lambda}^+(Y) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F(X+Y, \dots) - F(X, \dots) &= -\left(F(X+Y-Y, \dots) - F(X+Y, \dots)\right) \geq \\ &\geq -\mathcal{M}_{\lambda/n,\Lambda}^+(-Y) = \mathcal{M}_{\lambda/n,\Lambda}^-(Y), \end{aligned}$$

also

$$\mathcal{M}_{\lambda/n,\Lambda}^-(Y) \leq F(X+Y, \dots) - F(X, \dots) \leq \mathcal{M}_{\lambda/n,\Lambda}^+(Y) \quad \forall X, Y \in S(n). \quad (1.13)$$

5. Die Monge-Ampère-Gleichung $F(X) := \det(X)$ für $X \in S(n)$ ist elliptisch für konvexe Funktionen u , denn

$$\det(X+Y) \geq \det(X) \quad \text{für } X, Y \geq 0.$$

Genauer gilt

$$\partial_{p_{ij}} F(X) = \text{Cof}(X)_{ij},$$

wobei $\text{Cof}(X)$ die Kofaktor-Matrix von X bezeichnet. Ist X invertierbar, so gilt

$$\partial_{p_{ij}} F(X) = \det(X) X^{ij},$$

da X symmetrisch ist, wobei (X^{ij}) die Inverse von X ist. Also ist F für positives X strikt elliptisch.

Betrachten wir

$$G(X) := \log \det(X) \quad \text{für } X > 0,$$

so sehen wir

$$\partial_{p_{ij}} G(X) = X^{ij},$$

also

$$\sum_{j=1}^n \partial_{p_{ij}} G(X) X_{jm} = \delta_{im}.$$

Differentiation nach $\partial_{p_{kl}}$ ergibt

$$\sum_{j=1}^n \partial_{p_{ij}, p_{kl}} G(X) X_{jm} + \partial_{p_{ik}} G(X) \delta_l^m = 0$$

und nach Multiplikation mit X^{mr}

$$\partial_{p_{ij}, p_{kl}} G(X) = -X^{ik} X^{jl}.$$

Daher ist G konkav auf den positiv definiten Matrizen.

□

2 Harmonische Funktionen

Der Laplace-Operator

$$\Delta := \sum_{i=1}^n \partial_{ii}$$

ist der einfachste elliptische Operator zweiter Ordnung. Die Lösungen der Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0$$

heißen harmonische Funktionen.

Definition 2.1 Eine Funktion $u \in C_{loc}^2(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen heißt harmonisch (super-, subharmonisch), falls

$$\Delta u := \sum_{i=1}^n \partial_{ii} u = (\leq, \geq) 0 \quad \text{in } \Omega.$$

□

In diesem Paragraphen wollen wir verschiedene besondere Eigenschaften harmonischer Funktionen wie z.B. Mittelwertsatz, Maximumprinzip, Cauchy-Abschätzungen und Harnack-Ungleichung elementar herleiten. In späteren Paragraphen werden wir sehen, daß diese Eigenschaften in modifizierter Form für Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung gelten.

Wir beginnen mit dem Mittelwertsatz.

Satz 2.1 (Mittelwertsatz) Es sei $u \in C_{loc}^2(\Omega)$ mit $\Delta u = (\leq, \geq) 0$ in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt für Bälle $B = B_R(x_0) \subset \subset \Omega$,

$$u(x_0) = (\geq, \leq) \int_B u = (\geq, \leq) \int_{\partial B} u.$$

Beweis:

Für $0 < \varrho < R$ wenden wir den Divergenzsatz auf

$$\Delta u = \operatorname{div} \nabla u$$

in $B_\varrho(x_0)$ an und erhalten

$$\int_{\partial B_\varrho(x_0)} \partial_\nu u = \int_{B_\varrho(x_0)} \Delta u = (\leq, \geq) 0.$$

Führen wir Polarkoordinaten $x = x_0 + r\omega$, $|\omega| = 1$ ein, so gilt

$$\partial_\nu u = \frac{d}{dr} u(x_0 + r\omega)|_{r=\varrho} = \frac{d}{d\varrho} u(x_0 + \varrho\omega)$$

und somit

$$\int_{\partial B_\varrho(x_0)} \partial_\nu u = \varrho^{n-1} \int_{\partial B_1(0)} \frac{d}{d\varrho} u(x_0 + \varrho\omega) \, d\omega =$$

$$= \varrho^{n-1} \frac{d}{d\varrho} \int_{\partial B_1(0)} u(x_0 + \varrho \omega) \, d\omega = \varrho^{n-1} \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho^{1-n} \int_{\partial B_\varrho(x_0)} u \right) = (\leq, \geq) 0.$$

Da $u(x_0) = \lim_{\varrho \downarrow 0} \int_{\partial B_\varrho(x_0)} u$, folgt daraus für $0 < \varrho < R$

$$u(x_0) = (\geq, \leq) \int_{\partial B_\varrho(x_0)} u = (\geq, \leq) \int_{\partial B_R(x_0)} u.$$

Multiplikation mit $\frac{n\varrho^{n-1}}{R^n}$ und Integration über $]0, R[$ ergibt

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \frac{n}{R^n} \int_0^R \varrho^{n-1} u(x_0) \, d\varrho = (\geq, \leq) \frac{n}{R^n} \int_0^R \left(\frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_\varrho(x_0)} u \right) d\varrho = \\ &= \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x_0)} u = \int_{B_R(x_0)} u = (\geq, \leq) \int_{\partial B_R(x_0)} u, \end{aligned}$$

wobei $\omega_n := \mathcal{L}^n(B_1(0))$.

///

Das starke Maximumprinzip folgt sofort aus dem Mittelwertsatz.

Satz 2.2 (Starkes Maximumprinzip für harmonische Funktionen) *Es sei $u \in C_{loc}^2(\Omega)$ mit $\Delta u \geq 0$ in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend. Falls u sein Maximum im Innern annimmt, so ist u konstant.*

Beweis:

Es sei $M := \sup_{\Omega} u$ und $A := [u = M]$. Da u stetig in Ω ist, ist A abgeschlossen in Ω . Andererseits gilt für $y \in A$, $B_\varrho(y) \subseteq \Omega$ mit dem Mittelwertsatz, Satz 2.1, daß

$$M = u(y) \leq \int_{B_\varrho(y)} u \leq M.$$

Da $u \leq M$ auf $B_\varrho(y)$, folgt $u \equiv M$ auf $B_\varrho(y)$ und

$$B_\varrho(y) \subseteq A.$$

Damit ist A offen. Falls u sein Maximum im Innern annimmt, ist $A \neq \emptyset$, somit $A = \Omega$ und $u \equiv M$ konstant.

///

Das schwache Maximumprinzip folgt aus dem starken Maximumprinzip.

Satz 2.3 (Schwach Maximumprinzip für harmonische Funktionen) *Es sei $u \in C_{loc}^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit $\Delta u \geq 0$ in $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

Beweis:

Falls $\sup_{\Omega} u > \sup_{\partial\Omega} u$, so existiert $x_0 \in \Omega$ mit

$$u(x_0) \geq u \quad \text{auf } \Omega.$$

Mit dem starken Maximumprinzip, Satz 2.2, folgt, daß u auf der Zusammenhangskomponente Ω' von Ω , die x_0 enthielt, konstant ist, also

$$\sup_{\Omega} u = u(x_0) = \sup_{\partial\Omega'} u \leq \sup_{\partial\Omega} u.$$

///

Das schwache Maximumprinzip ergibt folgenden Eindeutigkeitssatz.

Satz 2.4 (Eindeutigkeit für das Dirichletproblem der Poissonsgleichung) *Es sei $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C_{loc}^0(\Omega)$, $\varphi \in C^0(\overline{\Omega})$. Dann gibt es höchstens eine Lösung $u \in C_{loc}^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ von*

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega,$$

$$u = \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Beweis:

Für die Differenz u zweier Lösungen gilt $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C_{loc}^2(\Omega)$ und

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

Mit dem schwachen Maximumprinzip, Satz 2.3, folgt

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u| = 0,$$

also $u = 0$.

///

Der Mittelwertsatz ergibt innere Abschätzungen für Ableitungen harmonischer Funktionen.

Satz 2.5 (Cauchy-Abschätzungen) *$u \in C_{loc}^2(\Omega)$ sei harmonisch in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt $u \in C_{loc}^\infty(\Omega)$ und für $\Omega' \subset \subset \Omega$ und einen beliebigen Multiindex γ*

$$\sup_{\Omega'} |\partial^\gamma u| \leq \left(\frac{n|\gamma|}{d}\right)^{|\gamma|} \sup_{\Omega} |u|$$

wobei $d = d(\Omega', \partial\Omega)$.

Beweis:

Zuerst nehmen wir $u \in C_{loc}^\infty(\Omega)$ an. Dann gilt

$$\Delta \nabla u = \nabla \Delta u = 0,$$

und ∇u ist harmonisch auf Ω . Mit dem Mittelwertsatz, Satz 2.1, und dem Divergenzsatz gilt für $B_R(x) \subset\subset \Omega$, daß

$$\nabla u(x) = \oint_{B_R(x)} \nabla u = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_R(x)} u \nu.$$

Daraus folgt

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{n}{R} \sup_{\partial B_R(x)} |u|.$$

Induktiv ergibt sich daraus

$$|\nabla^k u(x)| \leq \frac{n^k}{R} \sup_{B_{\frac{R}{k}}(x)} |\nabla^{k-1} u| \leq \left(\frac{n^k}{R}\right)^k \sup_{B_R(x)} |u|.$$

Die Annahme $u \in C_{loc}^\infty(\Omega)$ folgt aus dem nächsten Lemma von Weyl.

///

Lemma 2.1 (Lemma von Weyl) *Es sei $u \in L_{loc}^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und es gelte*

$$\int_{\Omega} u \Delta v = 0 \quad \text{für } v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dann ist $u \in C_{loc}^\infty(\Omega)$, und u ist harmonisch, d.h.

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Beweis:

Wir wählen $\lambda \in C_0^\infty(B_1(0))$ mit $\int \lambda = 1$, $\lambda(x) = \lambda(-x)$ und setzen

$$\lambda_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Weiter wählen wir $\Omega_4 \subset\subset \Omega_3 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega$ und setzen für $v \in L_{loc}^1(\Omega)$

$$v_\varepsilon(x) := \int_{\Omega_1} \lambda_\varepsilon(x-y) v(y) \, dy.$$

Es gilt $v_\varepsilon \in C_{loc}^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$v_\varepsilon \rightarrow v \quad \text{stark in } L^1(\Omega_1).$$

Ist $\text{supp } v \subseteq \Omega_2$ und $0 < \varepsilon < d(\Omega_2, \partial\Omega_1)$, so ist

$$\text{supp } v_\varepsilon \subseteq \Omega_1.$$

Insbesondere ist $u_\varepsilon \in C_{loc}^\infty(\mathbb{R}^n)$, und es gilt für $v \in C_0^2(\Omega_2)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \Delta u_\varepsilon v &= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_1} \Delta \lambda_\varepsilon(x-y) u(y) v(x) \, dy \, dx = \\ &= \int_{\Omega_1} u(y) \left(\int_{\Omega_1} \Delta \lambda_\varepsilon(y-x) v(x) \, dx \right) dy = \\ &= \int_{\Omega} u \cdot \Delta v_\varepsilon = 0, \end{aligned}$$

da $v_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega_1) \subseteq C_0^\infty(\Omega)$. Daraus folgt

$$\Delta u_\varepsilon = 0 \quad \text{in } \Omega_1,$$

und u_ε ist harmonisch in Ω_2 . Da $u_\varepsilon \in C_{loc}^\infty(\Omega_2)$ folgt aus den bereits bewiesenen Cauchy-Abschätzungen, Satz 2.5, und dem Mittelwertsatz, Satz 2.1,

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega_4} |D^k(u_\varepsilon - u_\delta)| &\leq \\ &\leq C(\Omega_3, \Omega_4, n, k) \sup_{\Omega_3} |u_\varepsilon - u_\delta| \leq \\ &\leq C(\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, n, k) \int_{\Omega_2} |u_\varepsilon - u_\delta| \end{aligned}$$

Da $u_\varepsilon \rightarrow u$ in $L^1(\Omega_1)$, folgt $u \in C_{loc}^\infty(\Omega_4)$, also $u \in C_{loc}^\infty(\Omega)$. Schließlich gilt für $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot v = \int_{\Omega} u \Delta v = 0,$$

und somit

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

///

Auch die Harnack-Ungleichung ist eine einfache Konsequenz aus dem Mittelwertsatz, Satz 2.1.

Satz 2.6 (Harnack-Ungleichung) $u \in C^2(\Omega)$ sei harmonisch in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $u \geq 0$. Dann gilt für $\Omega' \subset\subset \Omega, \Omega'$ zusammenhängend,

$$\sup_{\Omega'} u \leq C(\Omega, \Omega', n) \inf_{\Omega'} u.$$

Beweis:

Für $B_{4\rho}(x_0) \subseteq \Omega, x, y \in B_\rho(x_0)$ gilt mit dem Mittelwertsatz, Satz 2.1, da $u \geq 0$,

$$u(x) = \int_{B_\rho(x)} u \leq 2^n \int_{B_{2\rho}(x_0)} u \leq 3^n \int_{B_{3\rho}(y)} u = 3^n u(y).$$

Daraus folgt

$$\sup_{B_\varrho(x_0)} u \leq 3^n \inf_{B_\varrho(x_0)} u. \quad (2.1)$$

Nun überdecken wir Ω' mit endlich vielen Bällen $B_i = B_{\varrho_i}(x_i)$ mit

$$\overline{\Omega'} \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_{\varrho_i}(x_i),$$

$$x_i \in \overline{\Omega'} \subset \subset \Omega,$$

$$B_{4\varrho_i}(x_i) \subseteq \Omega.$$

Da Ω' zusammenhängend ist, existiert für beliebige $x, y \in \Omega'$ Indices $i_j \in \{1, \dots, N\}$, $j = 1, \dots, M$ mit

$$x \in B_{i_1}, y \in B_{i_M},$$

$$B_{i_{j-1}} \cap B_{i_j} \neq \emptyset \quad \text{für } j = 2, \dots, M,$$

$$M \leq N.$$

Dann gilt

$$u(x) \leq \sup_{B_{i_1}} u \leq 3^n \inf_{B_{i_1}} u \leq 3^n \sup_{B_{i_2}} u \leq \dots \leq 3^{Mn} \inf_{B_{i_M}} u \leq 3^{Nn} u(y),$$

also

$$\sup_{\Omega'} u \leq 3^{Nn} \inf_{\Omega'} u.$$

///

Satz 2.7 (Satz von Liouville) *Eine nach unten beschränkte harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^n$ ist konstant.*

□

Beweis:

Wir können o.B.d.A. $\inf_{\mathbb{R}^n} u = 0$ und $u \geq 0$ annehmen. Mit der Harnack-Ungleichung (2.1) folgt für alle $R > 0$

$$\sup_{B_R(0)} u \leq 3^n \inf_{B_R(0)} u$$

und für $R \rightarrow \infty$

$$\sup_{\mathbb{R}^n} u \leq 3^n \inf_{\mathbb{R}^n} u = 0.$$

Dies ergibt $u \equiv 0$.

///

Im Rest dieses Paragraphen leiten wir Darstellungsformeln für die Poissongleichung her. Wir beginnen mit den beiden Green'schen Formeln. $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, und es gelte der Divergenzsatz für Ω . Für $u, v \in C_{loc}^2(\overline{\Omega})$ gilt

$$\int_{\partial\Omega} v \partial_\nu u = \int_{\Omega} \operatorname{div}(v \nabla u) = \int_{\Omega} (v \Delta u + \nabla v \nabla u). \quad (2.2)$$

Dies ist die erste Green'sche Formel. Vertauscht man u und v und substrahiert, so erhält man die zweite Green'sche Formel

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) = \int_{\partial\Omega} (v\partial_{\nu}u - u\partial_{\nu}v). \quad (2.3)$$

Die Laplacegleichung hat in $\mathbb{R}^n - \{0\}$ die radial symmetrische Lösung r^{2-n} für $n \geq 3$ und $\log r$ für $n = 2$. Durch Normierung erhalten wir folgende Definition für $x \neq 0$:

$$\Gamma(x) := \begin{cases} \frac{1}{(2-n)n\omega_n}|x|^{2-n} & \text{für } n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{für } n = 2. \end{cases} \quad (2.4)$$

Γ heißt die Fundamentallösung für die Laplacegleichung. Dieser Name begründet sich mit folgenden Rechnungen. Zuerst sehen wir für $x \neq 0$

$$\partial_i \Gamma(x) = \frac{1}{n\omega_n} x_i |x|^{-n}, \quad (2.5)$$

$$\partial_{ij} \Gamma(x) = \frac{1}{n\omega_n} (\delta_{ij}|x|^2 - nx_i x_j) |x|^{-n-2}. \quad (2.6)$$

Daraus ergibt sich

$$\Delta \Gamma = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n - \{0\}, \quad (2.7)$$

und Γ ist harmonisch in $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Leiten wir weiter ab, so erhalten wir die Abschätzungen

$$|D^k \Gamma(x)| \leq C_{n,k} |x|^{2-n-k} \quad \text{für } x \neq 0, k \geq 1. \quad (2.8)$$

Für $x \in \Omega$, $v(y) := \Gamma(y-x)$ können wir die zweite Green'sche Formel nicht direkt auf Ω anwenden, da v bei x singulär ist. Stattdessen wenden wir (2.3) auf $\Omega - \overline{B_{\varrho}}(x)$ an und lassen $\varrho \rightarrow 0$. Wir erhalten

$$\int_{\Omega - \overline{B_{\varrho}}(x)} \Gamma(y-x) \Delta u(y) \, dy = \int_{\partial\Omega} (v\partial_{\nu}u - u\partial_{\nu}v) - \int_{\partial B_{\varrho}(x)} (v\partial_{\nu}u - u\partial_{\nu}v). \quad (2.9)$$

Es gilt

$$\left| \int_{\partial B_{\varrho}(x)} v\partial_{\nu}u \right| = |\Gamma(\varrho)| \int_{\partial B_{\varrho}(x)} \partial_{\nu}u \leq n\omega_n \varrho^{n-1} \Gamma(\varrho) \sup_{B_{\varrho}(x)} |\nabla u| \rightarrow 0 \quad \text{für } \varrho \rightarrow 0$$

und

$$\int_{\partial B_{\varrho}(x)} u\partial_{\nu}v = \Gamma'(\varrho) \int_{\partial B_{\varrho}(x)} u = \frac{1}{n\omega_n \varrho^{n-1}} \int_{\partial B_{\varrho}(x)} u \rightarrow u(x) \quad \text{für } \varrho \rightarrow 0.$$

Damit folgt aus (2.9) die Green'sche Darstellungsformel

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} \left(u(y) \partial_{\nu} \Gamma(x-y) + \Gamma(x-y) \partial_{\nu} u(y) \right) dy + \int_{\Omega} \Gamma(x-y) \Delta u(y) \, dy \quad \text{für } x \in \Omega. \quad (2.10)$$

Literatur

- [A] Alt, H.W., (1999) Lineare Funktionalanalysis, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.
- [E] Evans, L.C., (1998) Partial differential equations, Providence : American Math. Society, Graduate studies in mathematics 19.
- [GT] Gilbarg, D., Trudinger, N.S., (1998) Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer Verlag, 3.Auflage, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo.
- [Ru] Rudin, W.T., (1973) Functional Analysis, McGraw-Hill, New York.
- [S97] Simon, L., (1997) Schauder estimates by scaling, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, **5**, No. 5, pp. 391-407.