

Einführung in Partielle Differentialgleichungen
WS 2026/27
2. Übung

AUFGABE 5:

Es sei $u \in C_{loc}^2(B_1(0))$ rotationssymmetrisch, d.h. $u(x) = u(r)$, $r = |x|$. Zeigen Sie

$$\Delta u = r^{1-n}(r^{n-1}u')'.$$

Für $n = 2$ sei in Polarkoordinaten $u(r, \varphi) := u(re^{i\varphi})$. Zeigen Sie

$$\Delta u = \frac{1}{r} \partial_r(r \partial_r u) + \frac{1}{r^2} \partial_{\varphi\varphi} u.$$

AUFGABE 6:

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch. Zeigen Sie, daß $u^2, |\nabla u|^2$ subharmonisch sind und geben Sie Beispiele an, daß diese Funktionen i.a. nicht harmonisch sind.

AUFGABE 7:

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ offen. Es sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $u \in C_{loc}^2(\Omega)$ harmonisch. Zeigen Sie folgende Aussagen.

1. $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ sind harmonisch.
2. Für einfach zusammenhängendes Ω existiert eine harmonische Funktion $v \in C_{loc}^2(\Omega)$, so daß $u + iv$ holomorph ist. v heißt die zu u konjugiert harmonische Funktion und ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.
3. Für $\Omega = B_1(0) - \{0\}$ existiert zu

$$u(z) - \alpha \log |z|$$

wobei $\alpha := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \nabla u(r \cos \varphi, r \sin \varphi), (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \rangle d\varphi \in \mathbb{R}$, auf ganz $B_1(0) - \{0\}$ eine konjugiert harmonische Funktion.

4. Es gilt

$$u(z) = \alpha \log |z| + \operatorname{Re} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k = \alpha \log |z| + \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^k (\alpha_k \cos(k\varphi) - \beta_k \sin(k\varphi))$$

für $z = re^{i\varphi} \in B_1(0) - \{0\}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$.

5. Gilt $|u(z)| = o(|\log |z||)$, so kann u auf $B_1(0)$ harmonisch fortgesetzt werden.

6. Gilt $|u(z)| = o(|z|^{-k})$, $k \in \mathbb{N}$, so folgt

$$|u(z)| = \begin{cases} O(|z|^{-k+1}) & \text{für } k \geq 2, \\ O(|\log |z||) & \text{für } k = 1. \end{cases}$$

AUFGABE 8:

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C_{loc}^2(\Omega)$ mit

$$u(x) \leq \int_{B_\varrho(x)} u \quad \text{für alle } B_\varrho(x) \subset\subset \Omega. \quad (1)$$

Zeigen Sie, daß u subharmonisch ist, d.h. daß $\Delta u \geq 0$ in Ω . Geben Sie ein $u \in C_{loc}^0(\Omega)$ an, das (1) erfüllt, aber $u \notin C_{loc}^1(\Omega)$.

(Hinweis: Betrachten Sie zuerst ein quadratisches Polynom der Form $u(x) = a + bx + \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$ und machen anschließend eine Taylorentwicklung.)

Abgabetermin ist Donnerstag, 29.10.26.