Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2007

Semiklassische Methoden in der Quantenmechanik

Übungsblatt 1 (Besprechung am 25.04.2007)

Aufgabe 1: (Radialwirkung beim Keplerproblem)
In der Vorlesung haben wir gezeigt, daß die radiale Wirkungsvariable durch den Ausdruck

$$I_r = \frac{1}{2\pi} \oint \pm\sqrt{2m\left(E - \frac{e^2}{r}\right) - \frac{L^2}{r^2}}\,\mathrm{d}r$$

gegeben ist. Berechnen Sie dieses Integral und drücken Sie E als Funktion von L und I_r aus.
Hinweis: Gehen Sie wie folgt vor:

- Bestimmen Sie zunächst die Umkehrpunkte in r, und entscheiden Sie, welche Zweige der Wurzel auf den Teilstücken zu wählen sind.
- Setzen Sie r in die komplexe Ebene fort, und bestimmen Sie Verzweigungspunkte und Singularitäten des Integranden.
- Stellen Sie I_r als Kurvenintegral längs eines geschlossenen Weges dar – dazu müssen die Verzweigungsschnitte geeignet gelegt werden.
- Berechnen Sie das Integral mithilfe des Residuensatzes.

Aufgabe 2: (Gaußsche Integrale)

(a) Berechnen Sie das das Integral

$$F(z,w) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-zx^2+wx}\,\mathrm{d}x$$

für $z, w \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$. Zu welchen $z \in \mathbb{C}$ läßt sich $F(z,w)$ analytisch oder meromorph fortsetzen?

(b) Sei M eine symmetrische, nicht-singuläre $d \times d$-Matrix, d.h. $M^{\mathrm{T}} = M$ und $\det M \neq 0$. Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}x^{\mathrm{T}}Mx}$, also das Integral

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}x^{\mathrm{T}}Mx}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}xp}\,\mathrm{d}^d x\,.$$

Hinweis: Führen Sie eine quadratische Ergänzung durch, und nutzen Sie die Diagonalisierbarkeit von M aus.