Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2007

Semiklassische Methoden in der Quantenmechanik

Übungsblatt 3 (Besprechung frühestens am 23.05.2007)

Aufgabe 4: (Wirkung und Periode)
Seien $(p_E(t), x_E(t))$ periodische Lösungen der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen mit Hamiltonfunktion $H : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$ und Energie E, d.h. $H(p_E(t), x_E(t)) = E$ und $(p_E(t + T(E)), x_E(t + T(E))) = (p_E(t), x_E(t))$. Wir nennen

$$S(E) := \oint p\, \mathrm{d}x = \int_0^{T(E)} p(t)\, \dot{x}(t)\, \mathrm{d}t$$

die Wirkung der Bahn. Zeigen Sie:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}E}(E) = T(E)\,.$$

Hinweis: Führen Sie lokal Koordinaten $x = (u, v)$, mit kanonisch konjugierten Impulsen (p_u, p_v) ein, wobei u die Bahnkurve $x(t)$ parametrisiert und die Koordinaten v transversal zur Bahn sind. Aus $H(p_u, p_v, u, x) = E$ erhalten Sie lokal $p_u(u, v, p_v, E)$. Berechnen Sie $\frac{\partial p_u}{\partial E}$ mithilfe des Satzes über implizit definierte Funktionen, und verwenden Sie im Ergebnis die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

Aufgabe 5: (Asymptotik der Airy-Funktion)
Die Airy-Funktion $\mathrm{Ai}(x)$ ist definiert durch das Integral

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) \mathrm{d}t\,.$$

Bringen Sie das Integral durch eine geeignete Variablentransformation in die Form

$$\mathrm{Ai}(x) = |x|^\beta \int_{-\infty}^\infty a(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}|x|^\alpha \phi(t)}\, \mathrm{d}t$$

(mit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, und Funktionen $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$), so daß es mit der Methode der stationären Phase behandelt werden kann. Bestimmen Sie dann damit die führende Asymptotik für $x \to -\infty$.

Aufgabe 6: (Poissonsche Summationsformel)
Beweisen Sie die Poissonsche Summationsformel in d Dimensionen

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(n) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^d} g(\nu)\,,$$

wobei

$$g(k) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\, xk}\, \mathrm{d}^d x = (2\pi\hbar)^d\, \mathcal{F}[f](2\pi\hbar k)$$

Für welche f gilt die Beziehung? Diskutieren sie insbesondere die Fälle $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion

$$F(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(x+n)\,,$$

die – weil offensichtlich periodisch – in eine Fourierreihe entwickelt werden kann.