Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2007

Semiklassische Methoden in der Quantenmechanik

Übungsblatt 4 (Besprechung am 13.06.2007)

Aufgabe 7: (Weylsymbole)
Berechnen Sie den Operator mit Weylsymbol $A = x^2 p$ (in einer Dimension). Drücken Sie das Ergebnis auf zwei verschiedene Weisen aus:
(a) Als Differentialoperator der Form $g(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ mit einer (möglicherweise $\hbar$-abhängigen) Funktion $g(x)$.
(b) Als Summe von Produkten der Operatoren $\hat{p}$ und $\hat{x}$ ohne weitere additive Konstanten.
Berechnen Sie außerdem $\mathrm{symb}[\mathrm{op}[x^2]\mathrm{op}[p]]$.

Aufgabe 8: (Kohärenter Zustand)
Berechnen Sie die Wignerfunktion $W[\psi](p,x)$ des kohärenten Zustands

$$\psi(x) = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^{d/4} \exp\left(-\frac{(x-\overline{\alpha})^2}{2\hbar}\right), \qquad \alpha \in \mathbb{C}^d .$$

Was ist die physikalische Bedeutung von α? Geben Sie eine Symbolklasse an, die $W[\psi]$ enthält.

Aufgabe 9: (Zeitentwicklung der Wignerfunktion)
Sei $\psi(x,t)$ eine Lösung der Schrödingergleichung mit Hamiltonoperator

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x) . \tag{1}$$

Leiten Sie eine Bewegungsgleichung für die Zeitentwicklung der Wignerfunktion von $\psi(x,t)$ her.
Hinweis: Leiten Sie zunächst aus $\psi(x,t) = \hat{U}(t)\psi(x,0)$ eine Bewegungsgleichung für den Projektor $\hat{P}_\psi = \langle\psi(t),\cdot\rangle\psi(t)$ ab, bilden Sie dann auf beiden Seiten der Gleichung das Weylsymbol.

Aufgabe 10 (Hamilton-Jacobi für den Harmonischen Oszillator)
Finden Sie eine Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung,

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial x}(x,t), x\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 ,$$

für den Harmonischen Oszillator,

$$H(p,x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 .$$

Sei $(P(t), X(t))$ die Lösung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen mit $(P(0), X(0)) = (\xi, y)$. Bestimmen Sie $(P(t), X(t))$ mithilfe Ihrer Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung.