Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2007

Semiklassische Methoden in der Quantenmechanik

Übungsblatt 5 (Besprechung am 27.06.2007)

Aufgabe 11: (Spurformel für den harmonischen Oszillator)
Die klassische Hamiltonfunktion eines harmonischen Oszillators mit Frequenz ω ist

$$H(p,x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 \,.$$

Berechnen Sie

(a) das Volumen der Energieschale $\Omega_E = \{(p,x) \in \mathbb{R}^2 | H(p,x) = E\}$,

$$|\Omega_E| = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(H(p,x) - E)\, \mathrm{d}p\mathrm{d}x \,,$$

(b) sowie die Wirkung

$$S(E) = \oint p\mathrm{d}x$$

und die Periode $T(E) = \mathrm{d}S/\mathrm{d}E$ von Lösungen der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

Der Hamiltonoperator eines quantenmechanischen harmonischen Oszillators ist die Weylquantisierung der Hamiltonfunktion, $\hat{H} = \mathrm{op}[H] = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2$. Sein Spektrum ist durch die Eigenwerte

$$E_n = \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2})\,, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

gegeben.

(c) Zeigen Sie: Für die spektrale Dichte $\rho(E) := \sum_{n=0}^{\infty} \delta(E - E_n)$ gilt (in welchem Sinne?)

$$\rho(E) = \frac{|\Omega_E|}{(2\pi\hbar)} + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{T(E)}{2\pi\hbar}\, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}kS(E) - \mathrm{i}\pi k} \,.$$

Aufgabe 12: (Klassische Mechanik auf $\mathbb{T}^2$)
Betrachten Sie die freie klassische Dynamik auf einem zweidimensionalen Torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ mit euklidischer Metrik, d.h. $H = \frac{p^2}{2m}$, $x \in [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ mit Identifikation gegenüberliegender Seiten. Äquivalent dazu kann man auch zunächst $x \in \mathbb{R}^2$ betrachten und dann $x + m$, $m = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$, mit x identifizieren.

(a) Charakterisieren Sie periodische Bahnen auf $\mathbb{T}^2$ und geben Sie ihre Längen an.

(b) Wodurch zeichnen sich primitive periodische Bahnen (d.h. Bahnen, die nicht Vielfaches einer kürzeren Bahn sind) und deren Längen aus?

(c) Die Längen l_n periodischer Bahnen seien der Größe nach sortiert, $l_1 \le l_2 \le l_3 \le \ldots$ – wie wächst ihre Anzahl $\mathcal{N}(l) := \#\{l_n \le l\}$ asymptotisch an?
Hinweis: Es ergibt sich ein Gitterpunktproblem.

Aufgabe 13: (Quantenmechanik auf $\mathbb{T}^2$ und Spurformel)
Betrachten Sie ein quantenmechanisches freies Teilchen auf $\mathbb{T}^2$, d.h. $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$, $\psi \in L^2([0,1]^2)$, mit periodischen Randbedingungen, $\psi(x+m) = \psi(x)\ \forall\ x \in [0,1]^2$, $m \in \mathbb{Z}^2$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte $E_{n_1n_2}$ und (orthonormierten) Eigenfunktionen $\psi_{n_1n_2}(x)$ von $\hat{H}$.

(b) Setzen Sie im Folgenden $\hbar = 1 = 2m$. Wie verhält sich die spektrale Stufenfunktion $N(E) := \#\{E_{n_1n_2} \leq E\}$ asymptotisch für $E \to \infty$.

(c) Setzen Sie die Größen $r_2(n)$ und $2\pi\sqrt{n}$ aus $(*)$ mit dem Spektrum von $\hat{H}$ in Verbindung.

(d) Wählen Sie in $(*)$ die Funktion $h(p) = \theta(E - p^2)$, $E > 0$, wobei θ die Heavisidesche Stufenfunktion ist (siehe Abschnitt 2.3 der Vorlesung). Vergleichen Sie mit Aufgabenteil (b).

(e) Betrachten Sie weiter $(*)$ mit $h(p)$ aus Aufgabenteil (d). Benutzen Sie

$$\int_0^a x J_0(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{b} J_1(ab)$$

sowie die asymptotische Entwicklung

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}(2n+1)\right) + \mathcal{O}(z^{-3/2})\,, \qquad z \to \infty\,. \tag{+}$$

Geben Sie eine Abschätzung der Form $\mathcal{O}(E^\alpha)$, $E \to \infty$, für den Fehlerterm von $(*)$ an, der von dm Term $\mathcal{O}(z^{-3/2})$ in $(+)$ herrührt.
Hinweis: Es gilt $r_2(n) = \mathcal{O}(n^\varepsilon)$, $n \to \infty$ für jedes $\varepsilon > 0$.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Poissonsche Summationsformel aus Aufgabe 6 in $d = 2$ Dimensionen. Wählen sie eine rotationssymmetrische Funktion f und definieren Sie $h(2\pi r) := f(x)$, $r = |x|$, $x \in \mathbb{R}^2$, und bezeichnen Sie mit $r_2(n)$ die Anzahl der Möglichkeiten, $n \in \mathbb{N}$ als Summe zweier Quadratzahlen auszudrücken; wir setzen außerdem $r_2(0) = 1$. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_2(n)\, h(2\pi\sqrt{n}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty h(p)\, p\,\mathrm{d}p + \sum_{l_\mathrm{prim}} \sum_{k=1}^{\infty} r_2(k^2 l_\mathrm{prim}^2)\hat{h}(k l_\mathrm{prim})\,. \tag{$*$}$$

Dabei ist

$$\hat{h}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty h(p)\,p\,J_0(px)\,\mathrm{d}x$$

mit der Besselfunktion

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\cos\phi}\,\mathrm{d}\phi\,,$$

und die erste Summe läuft über alle Längen primitiver periodischer Bahnen auf $\mathbb{T}^2$, siehe Aufgabe 12b.