Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2007

Semiklassische Methoden in der Quantenmechanik

Übungsblatt 6 (Besprechung am 11.07.2007)

Aufgabe 14: (Asymptotik des Wärmeleitungskerns für das Rechteckbillard)
Wir betrachten ein Billard in einem Rechteck mit Kantenlängen a und b.

(a) Wie lauten die Eigenwerte des quantenmechanischen Hamiltonoperators $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$, wenn man (D) Dirichlet bzw. (N) Neumannn-Randbedingungen auf den Rechteckseiten fordert?

(b) Leiten Sie für Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen jeweils einen Ausdruck für die Spur $\Theta_{\hat{H}}(t) := \operatorname{tr} \mathrm{e}^{-\hat{H}t}$, $t > 0$, des Wärmeleitungskerns her, an dem man die Asymptotik für $t \to 0$ ablesen kann. Geben Sie jeweils die beiden führenden Terme explizit an.
Hinweis: Verwenden Sie die Poissonsche Summationsformel aus Aufgabe 6.

(c) Zeigen Sie, daß mit der spektralen Dichte $\rho(E)$ gilt

$$\Theta_{\hat{H}} = \int_0^\infty \rho(E)\, \mathrm{e}^{-Et}\, \mathrm{d}E\,.$$

Bestimmen Sie mittels inverser Laplacetransformation der $\Theta_{\hat{H}}$-Asymptotik Näherungen für $\rho(E)$ und $N(E) = \int_0^E \rho(E')\, \mathrm{d}E'$. In welchem Limes gelten diese Näherung? Vergleichen Sie auch mit den Ergebnissen aus Aufgabe 13.
Hinweis: Für die Laplacetransformation hilft evt. ein Blick auf `http://de.wikipedia.org/wiki/Laplace-Transformation` oder in ein einschlägiges Nachschlagwerk.

Aufgabe 15: (EBK-Quantisierung und die Spurformel von Berry und Tabor)
Ausgehend von den approximativen Eigenwerten der EBK-Quantisierung aus der Vorlesung, definieren wir die folgende approximative spektrale Dichte für ein integrables System,

$$\rho(E) := \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \delta\left(E - \overline{H}\big(\hbar(n + \tfrac{\mu}{4})\big)\right)\,.$$

(Wie müssen dieser Ausdruck und das weitere Vorgehen modifiziert werden, wenn nicht alle $n \in \mathbb{Z}^d$ zulässig sind?)

(a) Zeigen Sie, daß gilt

$$\rho(E) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[(E-\overline{H}(I))t + 2\pi k I] - \mathrm{i}\frac{\pi}{2}k\mu}\, \frac{\mathrm{d}t\, \mathrm{d}^d I}{2\pi\hbar^{d+1}}\,.$$

(b) Zeigen Sie weiter, daß in der Summe aus (a) der Term mit $k = 0$ zu $|\Omega_E|/(2\pi\hbar)^d$ wird, wobei

$$|\Omega_E| = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \delta(H(p,x) - E)\, \mathrm{d}^d p\, \mathrm{d}^d x\,.$$

(c) Berechnen Sie nun die restlichen Terme der Summe mit der Methode der stationären Phase. Wie lassen sich die stationären Punkte charakterisieren? Benötigen Sie in diesem Schritt weitere Annahmen über die klassische Dynamik?

(d) Werten Sie Ihr Ergebnis aus (c) für den eindimensionalen Harmonischen Oszillator, $H(p,x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2$, d.h. $\overline{H}(I) = \omega I$ (warum?), aus. Vergleichen Sie auch mit Aufgabe 11.