Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 08

Mathematik II für Biologen

Übungsblatt 5 (Abgabe am 21.05.2008)

Aufgabe 14 (10 Punkte)

Im folgenden werden Fragestellungen beschrieben, die jeweils durch die (statistische) Auswertung der Messergebnisse eines "Experimentes" beantwortet werden könnten. Identifizieren Sie jeweils die Nullhypothese H_0 und die Alternativhypothese H_A und beschreiben Sie, wie solch ein Experiment aussehen könnte. Erklären Sie auch in jedem Fall, was ein Fehler 1. Art bedeuten würde und was ein Fehler 2. Art. (Zur Erinnerung: Nur H_A kann "statistisch bewiesen" werden, nicht jedoch H_0. H_0 ist sozusagen der Angeklagte, der nur bei hinreichender Beweislast verurteilt (=abgelehnt) werden kann. Bei mangelhaften Beweisen muss H_0 freigesprochen werden. Man will sich also relativ sicher sein, dass H_0 tatsächlich falsch ist, wenn man H_0 ablehnt.)

Beispiel: Ein Hersteller von Angelschnüren will zeigen, dass die Schnüre eines Konkurrenten minderwertig sind, nämlich schon bei einer Belastung von weniger als 15 Kilogramm reißen. Dann ist H_0, dass die Schnüre des Konkurrenten erst bei einer (durchschnittlichen) Belastung von (mindestens) 15 kg reißen, und H_A, dass sie bei einer (durchschnittlichen) Belastung von echt weniger als 15 kg reißen. Ein Experiment, das die Daten dazu liefert, besteht darin, (viele) Angelschnüre des Konkurenten zu kaufen, jeweils mit bis zu 15 kg zu belasten, und zu notieren, ob sie bei einer Belastung von weniger als 15 kg reißen. Ein Fehler 1. Art tritt ein, wenn der Konkurrent aufgrund des Testergebnisses minderwertiger Schnüre beschuldigt wird, obwohl seine Schnüre die 15 kg i.a. aushalten. (Die Wahrscheinlichkeit für einen derartigen Fehler ist kleiner als das Signifikanzniveau α, falls H_0 stimmt.) Ein Fehler 2. Art tritt auf, wenn die Schnüre in der Tat minderwertig sind, der Test dies jedoch nicht nachweisen kann.

a) Beim Spielen von "Siedler von Catan" keimt der Verdacht, dass die Summe der beiden Würfel mit einer geringeren Wahrscheinlichkeit 7 ist, als dies bei fairen Würfeln der Fall sein sollte.
b) Sie vermuten, dass Entscheidungen im menschlichen Hirn getroffen werden, bevor der betroffene Mensch sich dieser Entscheidung bewusst wird, bzw. sie bewusst trifft (siehe z.B. `www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/0,1518,547074,00.html`).
c) Korrigiert der Tutor Ihrer Übungsgruppe tatsächlich viel strenger als der der Parallelgruppe?

Aufgabe 15 Matlab (Fortsetzung von Aufgabe 13) (10 Punkte)

Ändern Sie das Matlab Programm aus Aufgabe 13 ab, um damit folgende Fragen zu beantworten. Hierbei bezeichnet p die (unbekannte) Wahrscheinlichkeit, dass man mit Ihrem Würfel eine 6 würfelt, d.h. in einem Anteil p von sehr, sehr vielen Würfen zeigt der Würfel eine 6.

a) Angenommen, jemand schlägt vor, genau dann die Nullhypothese H_0 : *Die 6 kommt mit der richtigen Häufigkeit vor, d.h.* $p = 1/6$, zu verwerfen und stattdessen an die Alternativhypothese H_A : *Die 6 kommt zu häufig oder zu selten vor, d.h.* $p \neq 1/6$, zu glauben, wenn bei der einmaligen Durchführung des Experimentes entweder $X \leq 9$ oder $X \geq 25$ beobachtet wurde.
Weiterhin werde angenommen, dass $p = 0.1$ gilt, d.h. dass der Würfel tatsächlich unfair ist, weil die 6 langfristig nur in 10% der Fälle auftaucht, und nicht in 16.66%, wie dies bei einem fairen Würfel der Fall sein sollte.
Wie groß ist dann näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 tatsächlich verworfen wird? (Diese Wahrscheinlichkeit ist die sogenannte *Macht des Tests.*)
b) Laut Vorlesung enthält das $(1-\alpha)$-Vertrauensintervall für p diejenigen Werte p_0, für die die Nullhypothese $H_0 : p = p_0$ auf dem Signifikanz-Niveau α nicht verworfen wird, falls $X = 12$ (die tatsächliche Beobachtung) beobachtet wird.
Welche der Werte $p_0 = 0$; 0,04; 0,08; 0,12; 0,16; 0,20; 0,24 gehören zum 95%-Vertrauensintervall für p? (Wir werden später eine Formel kennenlernen, die das Vertrauensintervall ohne Simulation näherungsweise bestimmt.)

Aufgabe 16 (10 Punkte)

Gregor Mendel untersuchte zwei Merkmale von Erbsen: Die Form der Erbsen konnte rund (A, dominant) oder kantig (a, rezessiv) sein und das Albumen gelb (B, dominant) oder grün (b, rezessiv). Es wurden Samen von homozygoten Pflanzen mit den dominierenden Merkmalen A und B gekreuzt mit Pollen von homozygoten Pflanzen mit den rezessiven Merkmalen a und b. Das Resultat: "Die befruchteten Samen erschienen rund und gelb, jenen der Samenpflanze ähnlich." Die "befruchteten Samen" (Erbsen) haben ja alle den Genotyp AaBb, d.h. sie tragen die "Allele" A und a im Verhältnis 1:1 in sich, ebenso B und b. "Die daraus gezogenen Pflanzen gaben Samen von vielerlei Art, welche oft gemeinschaftlich in einer Hülse lagen. Im Ganzen wurden von 15 Pflanzen 556 Samen erhalten, von diesen waren:

315	rund und gelb
101	kantig und gelb
108	rund und grün
32	kantig und grün."

Nach den Mendelschen Gesetzen müssten die Wahrscheinlichkeiten für die vier Phänotypen im Verhältnis 9:3:3:1 stehen. D.h. man würde "erwarten", dass 9/16 der Erbsen, also 312,75 Erbsen, rund und gelb sind. Die Übereinstimmung mit den tatsächlichen Daten ist für diesen Phänotyp also schon relativ gut. Ist sie insgesamt gut genug, dass man sagen kann, dass die Daten dem Mendelschen Modell nicht widersprechen, oder sollte man erwarten, dass die Daten noch besser den Vorhersagen von Mendel genügen sollten?

a) Berechnen Sie (wahlweise mit Taschenrechner oder Computer) die folgende Teststatistik T, die in einer einzigen Zahl zusammenfassen soll, wie gut die Daten zu der Nullhypothese H_0 passen, dass die Erbsen dem Mendelschen Modell folgen.

$$T := \sum_{i=1}^{4} \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i},$$

wobei
- die 4 Gruppen "rund und gelb", "kantig und gelb", "rund und grün" und "kantig und grün" mit $i = 1, 2, 3$ und 4 durchnummeriert wurden,
- n_i die tatsächlich beobachtete Anzahl von Erbsen in der Gruppe i und
- m_i die erwartete Anzahl von Erbsen in Gruppe i ist (falls Mendel recht hat).

b) Welche Werte von T sprechen am meisten dafür, dass das Mendelsche Modell nicht stimmt, d.h. dass die Alternativhypothese H_A gilt? Große oder kleine Werte? Warum?

c) (Matlab) Um zu entscheiden, ob die tatsächlich beobachteten Häufigkeiten der einzelnen Ausprägungen nur im üblichen Rahmen um die erwarteten Häufigkeuten streuen oder ob sie stärker davon abweichen, als dies der Fall sein sollte, wenn Mendels Modell stimmt, simulieren Sie bitte $n = 10000$ Mal die Erzeugung von 556 Erbsen nach Mendels Regeln und berechnen Sie jeweils den Wert von T aus Aufgabe (a). Zeichnen Sie ein Histogramm der so erhaltenen Werte von T. In wieviel Prozent der simulierten Fälle spricht der Wert von T noch stärker für H_A, als dies die echten Daten tun? (Dies ist eine Schätzung für den p-Wert.) Würde demnach H_0 auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 10\%$ zugunsten von H_A verworfen werden? Matlab (unvollständig):

```
>> n=10000;                % Anzahl von Wiederholungen des Experimentes
>> erw=556/16*[9,3,3,1]    % erwartete Anzahl in jeder Gruppe
>> x=rand(556,n);          % Fuer jede Erbse wird eine Zufallszahl
                           % zwischen 0 und 1 erzeugt.
>> rundgelb=sum(x<9/16);   % Erbse wird rund und gelb, falls Zufallszahl <9/16.
                           % rundgelb = Anzahl runder und gelber Erbsen
>> kantiggelb=sum(9/16<=x & x<12/16);
>> rundgruen=???
>> kantiggruen=???
>> T=(rundgelb-erw(1)).^2/erw(1)+(kantiggelb-erw(2)).^2/erw(2)+???;
>> hist(T,20)
```