Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 08

Mathematik II für Biologen

Übungsblatt 8 (Abgabe am 11.06.2008)

Aufgabe 25 (10 Punkte)

Sie sind eines von $2n+1$ Mitgliedern ($n \in \mathbb{N}$) eines Gremiums, in dem eine Abstimmung durchgeführt wird. Jedes Mitglied kann mit "ja" oder "nein" stimmen (Enthaltungen sind nicht möglich), die einfache Mehrheit entscheidet. Nehmen sie an, dass jedes der $2n$ anderen Mitglieder sich zufällig für "ja" oder "nein" entscheidet.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihre eigene Stimme den Ausschlag gibt?

b) Das Ergebnis aus Teil (a) enthält Fakultäten. Für große n kann man diese durch die Stirlingssche Formel nähern,

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{für } n \to \infty\,.$$

Verwenden Sie diese Näherung für das Ergebnis aus Teil (a). Wie sinkt demnach Ihr Einfluss mit wachsender Größe des Gremiums, d.h. für große n?

c) 2007 setzte sich Polen dafür ein, die Anzahl der Stimmen, die ein Mitgliedsstaat im Rat der Europäischen Union hat, proportional zur Wurzel der Bevölkerungszahl zu wählen. War dies ein sinnvoller und fairer Vorschlag? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 26 (Binomialtest) (10 Punkte)

Bemerkung: Die folgenden Informationen waren im Jahr 2002 aktuell.

Eine Variante der Creutzfeldt-Jakob Krankheit (vCJd) wird nach gängiger Meinung durch die gleichen Prionen (spezielle Proteine) wie BSE (Bovine spongiforme Enzephalopathie) hervorgerufen. Im Jahr 2002 wurde eine Studie[4] veröffentlicht, in der von der Untersuchung von Blinddarm- und Mandelgeweben berichtet wurde, die 8318 Patienten im Alter zwischen 10 und 50 in den Jahren 1995 bis 1999 in Großbritannien entnommen wurden. Dabei wurden im Gewebe genau eines Patienten die gesuchten Prionen gefunden.

Sei $p \in [0,1]$ der wahre, aber unbekannte Anteil von Personen in Großbritannien, die in den Jahren 1995 bis 1999 zwischen 10 und 50 Jahre alt waren und die nachweisbare Prionen in Mandeln oder Blinddarm hatten.

a) Testen Sie mit einem Binomialtest $H_0 : p = 5\cdot 10^{-4}$ gegen $H_A : p \neq 5\cdot 10^{-4}$ zum Signifikanz-Niveau $\alpha = 5\%$. Hinweis: Um den Verwerfungsbereich zu bestimmen, können Sie den MATLAB-Befehl `>> binocdf(0:L,n,p)` benutzen, der Ihnen die Folge

$$\sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad (l = 0, 1, \ldots, L)$$

liefert. Denken Sie auch daran, dass man bei zweiseitigen Tests jeweils links und rechts $\leq \alpha/2$ der Verteilung von T unter H_0 abschneidet, um den Verwerfungsbereich zu konstruieren.

b) Bestimmen Sie das zugehörige 95%-Vertrauensintervall für p (d.h. die Menge aller Werte p_0, für die $H_0 : p = p_0$ nicht verworfen wird). Hinweis: Falls Sie im Intervall [0,1] die Nullstelle eines Polynomes in p, z.B. von $(1-p)^7 + 7p(1-p)^6 - 0{,}1$, finden wollen, so tut dies der folgende MATLAB-Befehl:

```
>> fzero(inline('(1-p)^7+7*p*(1-p)^6-0.1'),[0,1])
```

---

[4] Quelle: Accumulation of prion protein in tonsil and appendix: review of tissue samples. *BMJ (British Medical Journal)*, bmj.com, Vol. 325, pp. 633-634 (21 Sept. 2002)

Aufgabe 27 (10 Punkte)

Das Pharmaunternehmen ANTIQUARTIS preist das neue Mittel PASTOFEBRIL gegen Weidefieber bei Kühen an. Ein Landwirt probierte dieses Mittel an seiner Kuh Thekla aus, die an Weidefieber erkrankt war. Daraufhin wurde Thekla gesund. Nun ist auch die Kuh Elma an Weidefieber erkrankt.

Geben Sie aufgrund der Beobachtung an Thekla ein 95%-Vertrauensintervall für die Wahrscheinlichkeit p an, dass auch Elma gesund wird, wenn sie mit PASTOFEBRIL behandelt wird. Führen Sie dazu einen einseitigen Binomialtest durch (ohne jedoch die in der Vorlesung angegebenen Faustregeln anzuwenden, da $n = 1$ nun wirklich nicht groß ist). Testen Sie hierbei einseitig $H_0 : p = p_0$ gegen $H_A : p > p_0$ und erinnern Sie sich daran, dass das Vertrauensintervall aus denjenigen p_0 besteht, für die H_0 nicht verworfen werden kann. (Die Alternative H_A entspricht der Behauptung von ANTIQUARTIS und der Hoffnung des Landwirtes, dass PASTOFEBRIL tatsächlich wirkt.)

Aufgabe 28 (Vorzeichentest) (10 Punkte)

In einer Studie über den Effekt des Rauchens auf die Blutgerinnung wurde bei 11 Personen vor und nach dem Rauchen einer Zigarette der prozentuale Anteil von aggregierten Blutplättchen in einer Blutprobe gemessen. Dabei ergaben sich folgende Daten.

Person Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Anteil vorher	25	25	27	44	30	67	53	53	52	60	28
Anteil nachher	27	29	37	56	46	82	57	80	61	59	43

Um zu beurteilen, ob der Anteil von aggregierten Blutplättchen nach dem Rauchen der Zigarette systematisch größer ist als vorher (dies ist H_A), zählt man einfach die Anzahl T der Personen, bei denen die Differenz positiv ist (daher der Name *Vorzeichentest*).

a) Welche Werte kann die Teststatistik T theoretisch annehmen? Welchen Wert hat T in dieser Studie?

b) Wenn die Nullhypothese H_0 : *Rauchen beeinflusst nicht die Aggregation der Blutplättchen* richtig ist, welche Verteilung hat dann T? Geben Sie dazu eine Formel für $P[T = k]$ für alle in (a) bestimmten möglichen Werte k von T an.

c) Berechnen Sie den zugehörigen p-Wert des Tests.

Aufgabe 29 (10 Punkte)

Eine Suspension von Bakterien (Keimen) wird auf 100 Petri-Schalen abgesetzt, pro Petri-Schale 0,2 ml. Die Keimzahl in der Suspension sei 100/ml. Nach einer gewissen Zeit werden die Bakterienkolonien, von denen jede aus einem Keim entsteht, unter dem Mikroskop ausgezählt.

a) Wie groß ist die erwartete (durchschnittliche) Anzahl λ_0 von Bakterienkolonien pro Petri-Schale?

Im folgenden nehmen wir an, dass die Anzahl X von Bakterienkolonien pro Petri-Schale poissonverteilt ist mit einem Parameter, der λ genannt wird.

b) Für einen anderen Versuch braucht man Petri-Schalen, die genau eine Bakterienkolonie enthalten. Wie stark muss obengenannte Suspension verdünnt werden, damit die erwartete Anzahl solcher Schalen maximal ist? (Für welches λ ist die Wahrscheinlichkeit maximal, dass eine Schale genau eine Bakterienkolonie enthält?)

c) In einem anderen Fall möchte man die Suspension möglichst stark verdünnen, aber so, dass man erwarten kann, dass 80 der 100 Schalen mindestens eine Bakterienkolonie enthalten. Wie stark darf man maximal verdünnen? (Ab welchem λ ist die Wahrscheinlichkeit, für eine fest vorgegebene Petri-Schale keine Bakterienkolonie zu erhalten, $\leq 20\%$?)

d) Wie gross ist für $\lambda = 0{,}8$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine nicht-leere Petri-Schale genau eine Bakterienkolonie enthält? (Salopp gefragt: Wieviele Prozent der Petri-Schalen, die mindestens eine Bakterienkolonie enthalten, werden genau eine enthalten? HINWEIS: Dies ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit.)