

Mathematik II für Biologen

Klausur am 23.7.2008

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe (nicht Teilaufgabe) auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind 75 Punkte erreichbar, hinreichend zum Bestehen sind 33 Punkte.

Hilfsmittel: Zwei beidseitig handbeschriebene A4-Blätter, nicht internetfähiger Taschenrechner.

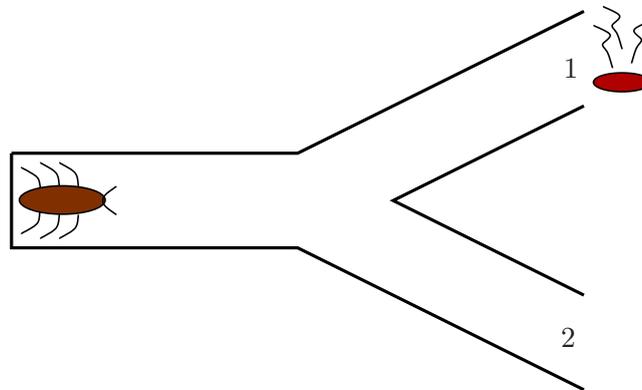
Bearbeitungszeit: 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

(2+2+4+1+4+4+2 = 19 Punkte)

Sie möchten statistisch beweisen, dass Borkenkäfer durch ein bestimmtes Pheromon (Duftstoff) ange-lockt werden und führen dazu das im Folgenden schematisch skizzierte Experiment durch.



Vor der Tunnelöffnung 1 ist eine Duftstoffprobe platziert. Sie setzen $n = 50$ Käfer (einzeln) am linken Ende der Versuchsanordnung aus und zählen, wieviele die Anordnung durch die Öffnung 1 verlassen; diese Anzahl dient als Teststatistik und werde mit X bezeichnet.

- a) Formulieren Sie die Nullhypothese H_0 und die Alternativhypothese H_A .
HINWEIS: Bezeichnen Sie dazu mit p die (unbekannte) Wahrscheinlichkeit, dass ein Käfer die Vorrichtung durch die obere Öffnung verlässt. Überlegen Sie sich auch, ob Sie einen einseitigen oder eine zweiseitigen Test durchführen sollten.

- b) Geben Sie die Verteilung der Teststatistik unter H_0 an.

- c) Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich K für auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$. Dabei hilft die Ausgabe des folgenden MATLAB-Befehls:

```
>> binocdf(1:50,50,.5)
```

```
ans =
```

```
Columns 1 through 10
```

```
0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
```

```
Columns 11 through 20
```

```
0.0000 0.0002 0.0005 0.0013 0.0033 0.0077 0.0164 0.0325 0.0595 0.1013
```

```
Columns 21 through 30
```

```
0.1611 0.2399 0.3359 0.4439 0.5561 0.6641 0.7601 0.8389 0.8987 0.9405
```

```
Columns 31 through 40
```

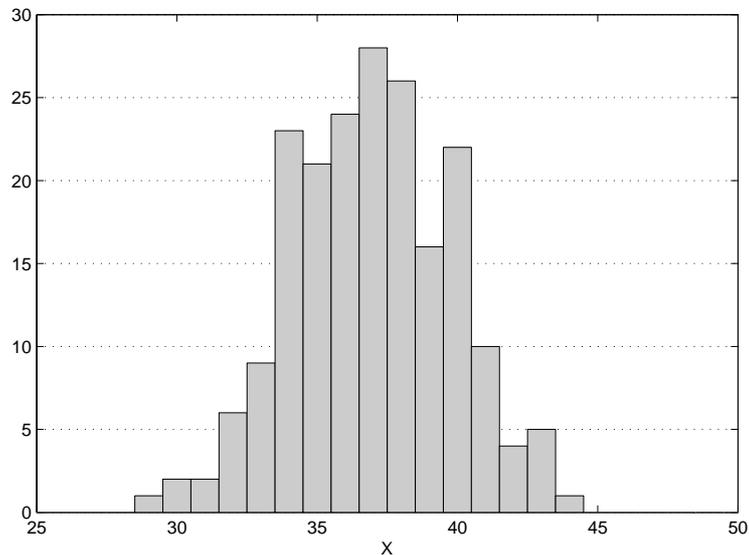
```
0.9675 0.9836 0.9923 0.9967 0.9987 0.9995 0.9998 1.0000 1.0000 1.0000
```

```
Columns 41 through 50
```

```
1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000
```

- d) Sie beobachten $X = 36$. Wie entscheidet Ihr Test?

- e) Geben Sie außerdem den p-Wert an. Dabei hilft ebenfalls die MATLAB-Ausgabe aus Teil (c).
- f) Für ein anderes Pheromon wissen Sie bereits, dass es Borkenkäfer anlockt. Ihr Experiment wurde von anderen Forschern auch für dieses Pheromon bereits 200 mal mit jeweils $n = 50$ Käfern durchgeführt. Die dabei beobachteten Werte für X sind im folgenden Histogramm dargestellt.



Wie hoch schätzen Sie, darauf basierend, für dieses Pheromon die Macht Ihres Tests?

- g) Welchen Wert hätte der Erwartungswert $E[X]$ für $p = 0,68$ und $n = 50$?
Berechnen Sie für diesen Fall auch die Varianz $\text{Var}(X)$.

Aufgabe 2

(13+4+2 = 19 Punkte)

In einer Studie wurde die Abstoßungshäufigkeit von transplantierten Nieren in männliche Empfänger in Abhängigkeit vom Geschlecht des Spenders untersucht.* Von 76000 männlichen Spendernieren wurden 11000 während des ersten Jahres nach der Transplantation abgestoßen. Von 45000 weiblichen Spendernieren wurden im gleichen Zeitraum 8000 abgestoßen. Kontingenztabelle der beobachteten Werte:

	Spender ♂	Spender ♀	Total
Abgestoßen während des 1. Jahres	11000	8000	19000
Nicht abgestoßen während des 1. Jahres	65000	37000	102000
Total	76000	45000	121000

- a) Testen Sie mit einem χ^2 -Test auf dem Signifikanzniveau 5%, ob die Abstoßungshäufigkeit vom Geschlecht des Spenders abhängt. Geben Sie dazu
- die Nullhypothese H_0 und die Alternativhypothese H_A , (2 Punkte)
 - die Kontingenztabelle für die unter H_0 erwarteten Werte, (4 Punkte)
 - die Teststatistik (Wert und Rechenweg), (4 Punkte)
 - das Verwerfungskriterium und (2 Punkte)
 - den Testentscheid an. (1 Punkt)
- b) Bezeichnen Sie mit p_\square (bzw. mit p_σ), die Wahrscheinlichkeit, dass eine weibliche (bzw. männliche) Spenderniere von einem männlichen Empfänger innerhalb des ersten Jahres abgestoßen wird. Berechnen Sie jeweils das 95%-Vertrauensintervall für p_\square und p_σ im Sinne eines zweiseitigen Binomialtests.
- c) Unterstützt Ihre Beobachtung in (b) Ihr Ergebnis aus (a)? Antworten Sie mit "Ja" oder "Nein" und Begründen Sie Ihre Antwort in *einem* Satz.

*vgl. The Lancet **372** (2008) 49–53; Daten gerundet.

Aufgabe 3

(1+1+6+7+2 = 17 Punkte)

Die Längen (in mm) von 15 verschiedenen Eiern einer bestimmten Kuckucksart sind

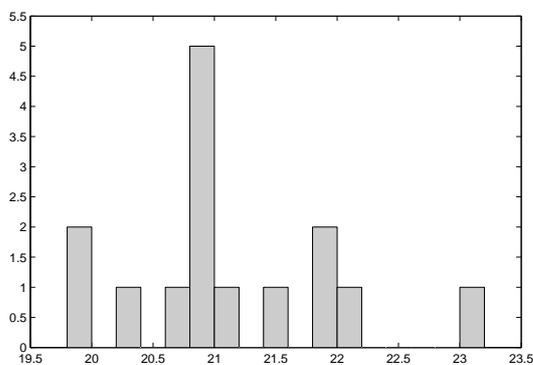
19,8 22,1 21,5 20,9 22 21 23,2 21 20,3 20,9 22 20 20,8 21,2 21.

Untersuchen Sie – mithilfe statistischer Tests auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ – ob die Annahme, dass diese Kuckuckseier im Mittel ungefähr 21,6mm lang sind, mit den Daten vereinbar ist.

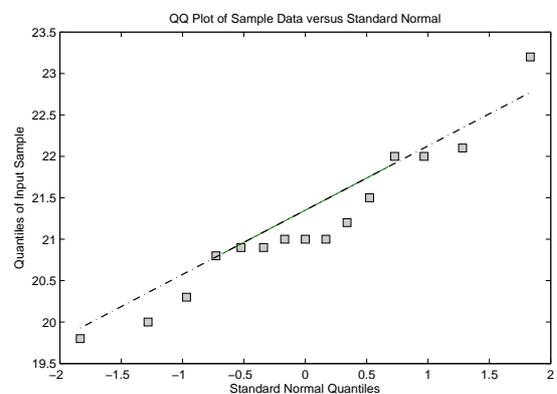
Vielleicht helfen Ihnen dabei die folgenden MATLAB-Zeilen:

```
>> X = [19.8 22.1 21.5 20.9 22 21 23.2 21 20.3 20.9 22 20 20.8 21.2 21];
>> mean(X) % Mittelwert
ans = 21.1800
>> var(X) % Stichprobenvarianz
ans = 0.7746
>> sqrt(var(X))
ans = 0.8801
```

```
>> hist(X,12)
```



```
>> qqplot(X)
```



- Wie lautet die Nullhypothese?
- Wie lautet die Alternativhypothese?
- Führen Sie dazu einen t-Test durch:
Wie lautet die Formel für die Teststatistik? Berechnen Sie Ihren Wert.
Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich bzw. das Verwerfungskriterium.[†]
Wie entscheidet der Test?
- Führen Sie nun auch einen Wilcoxon-Test durch:
Berechnen Sie den Wert der Teststatistik (Rechenweg!)
Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich bzw. das Verwerfungskriterium.[†]
Wie entscheidet der Test?

HINWEIS: Vielleicht hilft Ihnen die folgende (unbeschriftete und unvollständige) Tabelle.

19,8	22,1	21,5	20,9	22	21	23,2	21	20,3	20,9	22	20	20,8	21,2	21
-1.8	0.5	-0.1	-0.7	0.4	-0.6	1.6	-0.6	-1.3	-0.7	0.4	-1.6	-0.8	-0.4	-0.6
15	5	1	9,5		7		7	12	9,5	3	13,5	11	3	7

- Sollten Sie nun dem t-Test oder dem Wilcoxon-Test glauben? Begründen Sie Ihre Antwort in *maximal zwei Sätzen*.

[†]Hilfreiche Tabellen finden Sie auf der letzten Seite.

Aufgabe 4

(2+3+5 = 10 Punkte)

In einer Bevölkerung gibt es 2% sogenannte “K-Personen”; das sind Personen, die den Erreger einer noch nicht ausgebrochenen Krankheit im Blut haben. Bei einem Schnelltest werden 94% der K-Personen als solche erkannt. Andererseits stuft der Test 3% der Nicht-K-Personen irrtümlicherweise als K-Personen ein. Eine (zufällig ausgewählte) Person werde getestet.

Betrachten Sie die Ereignisse:

$$K := \text{“Diese Person ist eine K-Person.”}$$

$$T := \text{“Der Test stuft diese Person als K-Person ein.”}$$

- Drücken Sie die Bedeutung der (bedingten) Wahrscheinlichkeit $P[K|T]$ in Worten aus.
- Drücken Sie die drei im Aufgabentext bezifferten Wahrscheinlichkeiten mithilfe der mathematischen Notation ähnlich Aufgabenteil (a) aus.
- Eine (zufällig ausgewählte) Person werde vom Test als Nicht-K-Person eingestuft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person dennoch eine K-Person ist? Drücken Sie hierzu die gesuchte Wahrscheinlichkeit ebenfalls mithilfe der Notation aus den Teilen (a) und (b) aus und berechnen Sie sie.

Aufgabe 5

(10 Punkte)

Notieren Sie für die folgenden Aussagen den Buchstaben (a-e) und ein **W** für *wahr* oder ein **F** für *falsch*. Für jede richtige Antwort erhalten Sie 2 Punkte, für jede falsche werden 2 Punkte abgezogen. Die Mindestpunktzahl für diese Aufgabe ist Null.

- Wenn man das Signifikanzniveau erhöht, verkleinert sich der p-Wert.
- Das 95%-Vertrauensintervall ist nie kleiner als das 99%-Vertrauensintervall.
- Wenn man das Signifikanzniveau erhöht, verkleinert sich der Annahmehereich.
- Wenn ein einseitiger Test auf Signifikanzniveau α verworfen hat, so verwirft auch der entsprechende zweiseitige Test auf Signifikanzniveau 2α .
- Ein höheres Signifikanzniveau führt auch zu größeren Vertrauensintervallen.

TABELLEN

Einige Quantile $t_{d_f, q}$ der Studentschen t-Verteilung für d_f Freiheitsgrade:

$d_f \setminus q$	0,90	0,95	0,975	0,99
14	1,345	1,761	2,145	2,624
15	1,341	1,753	2,131	2,602
16	1,337	1,746	2,120	2,583

Der Wilcoxon-Test verwirft für Stichprobenumfang n , falls $\min(U^+, U^-)$, das Minimum der Rangsummen der positiven und negativen Abweichung kleiner oder gleich U_{krit} ist:

n	14	15	16
U_{krit} einseitig	25	30	35
U_{krit} zweiseitig	21	25	29