Mathematik II für Biologen

Beschreibende Statistik
Zweidimensionale (bivariate) Daten

Stefan Keppeler

23. April 2008

Zweidimensionale Stichproben

Graphisch: Streudiagramm

- Lineare Regression
- Transformationen

Numerisch: Korrelationen

- Produktmomenten-Korrelation
- Rangkorrelation
- Warnung

Stichprobe (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) von Paaren von Zahlen.
Oft:

- x: Ausgangsgröße, “unabhängige” Variable
- y: Zielgröße, Idee $y = f(x)$, “abhängige” Variable

Beispiel 1: Grille

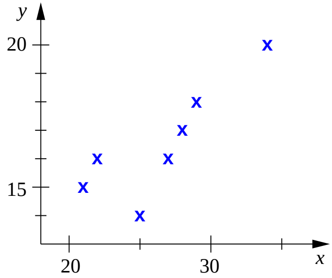
- x_i: Temperatur $[^\circ\mathrm{C}]$
- y_i: Zirpfrequenz (Tonhöhe) $[1/\mathrm{s}]$

x_i	21	22	25	27	28	29	29	34
y_i	15	16	14	16	17	16	18	20

x_i	21	22	25	27	28	29	29	34
y_i	15	16	14	16	17	16	18	20

Beschreibungsmöglichkeiten

- Wende Methoden für eindimensionale Stichproben getrennt auf x und y an.
  Nachteil: Zusammenhang zwischen x und y geht verloren.
- Graphisch: Streudiagramm (scatter plot)



Falls Streudiagramm eine Gerade suggeriert: Lineare Regression
`(siehe Mathematik I, Vorlesung 14)`

$$y(x) = mx + b + \text{“kleiner Fehler”}$$

Wähle m und b so, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (mx_i + b)\right)^2$$

minimal. Ergebnis:

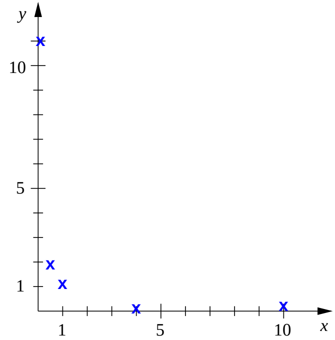
$$m = \frac{\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum(x_i - \overline{x})^2}\,, \qquad b = \overline{y} - m\overline{x}$$

Manchmal erinnert das Streudiagramm erst nach Transformation(en) an eine Gerade,

$$x_i \mapsto g(x_i)\,, \qquad y_i \mapsto f(y_i)\,.$$

Beispiel 2: Andere Stichprobe

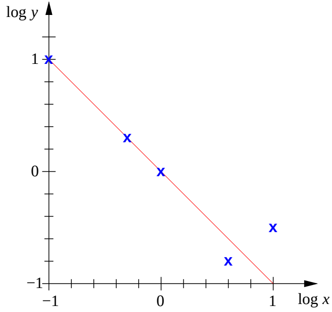
x_i	0,1	0,5	1,0	4,0	10
y_i	11	1,9	1,1	0,15	0,2



Sieht nicht nach Gerade aus...
Vielleicht Potenzgesetz?

x_i	0,1	0,5	1,0	4,0	10
y_i	11	1,9	1,1	0,15	0,2

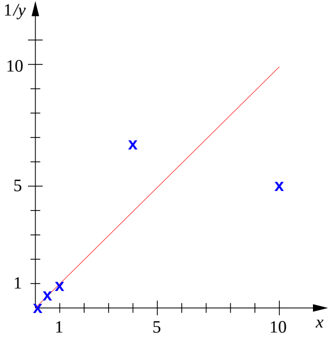
$\log_{10} x_i$	$-1{,}0$	$-0{,}3$	$0{,}0$	$0{,}6$	$1{,}0$
$\log_{10} y_i$	$1{,}0$	$0{,}3$	$0{,}0$	$-0{,}8$	$-0{,}7$



Ungefähr Gerade mit Steigung -1.
Also wäre auch $y_i \mapsto 1/y_i$ gut gewesen...

x_i	0,1	0,5	1,0	4,0	10
y_i	11	1,9	1,1	0,15	0,2

x_i	0,1	0,5	1,0	4,0	10
$1/y_i$	0,1	0,5	0,9	6,7	5,0



Gerade mit Steigung 1?

Die Produktmomenten-Korrelation r_{xy} nach Pearson
misst die Stärke eines linearen Zusammenhangs zwischen x und y,

$$r_{xy} := \frac{s_{xy}}{s_x \, s_y} \,,$$

wobei:

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$ Stichprobenkovarianz,

s_x, s_y Standardabweichungen.

Für den Wert gilt immer: $-1 \leq r_{xy} \leq 1$, denn...

Interpretation: Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left(x_1 - \overline{x}, \ldots, x_n - \overline{x}\right) \\ \vec{b} &= \left(y_1 - \overline{y}, \ldots, y_n - \overline{y}\right) \end{aligned} \quad , \qquad r_{xy} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \, |\vec{b}|} = \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

Für den Wert gilt immer: $-1 \leq r_{xy} \leq 1$.

Je näher $|r_{xy}|$ bei 1, desto stärker ist der lineare Zusammenhang zwischen x und y.

$\lvert r_{xy}\rvert = 1$	perfekter linearer Zusammenhang
$r_{xy} \approx 0$	kein linearer Zusammenhang

Vorzeichen (VZ):
VZ von r_{xy} $=$ VZ der Steigung m der Regressionsgeraden

Beispiele:

- "Grille": $r_{xy} = 0{,}8$
- Beispiel 2: $r_{xy} = -0{,}5$
- weitere qualitativ...

Die Rangkorrelation nach Spearman misst die Stärke eines monotonen Zusammenhangs, zwischen x und y,

$$r_{xy}^{(\mathrm{SP})} = r_{\mathrm{Rang}(x)\,\mathrm{Rang}(y)}$$

In Beispiel 2:

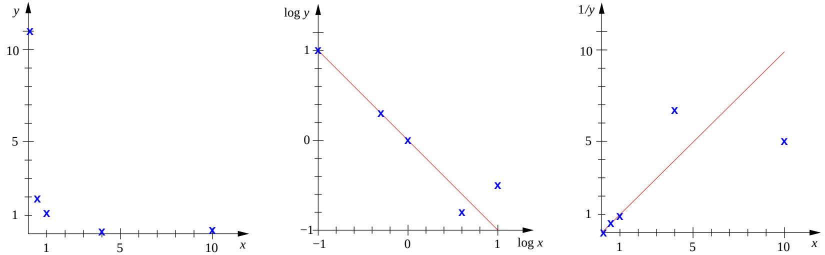
x_i	0,1	0,5	1,0	4,0	10
y_i	11	1,9	1,1	0,15	0,2

Rang x_i	1	2	3	4	5
Rang y_i	5	4	3	1	2

$r_{xy}^{(\mathrm{SP})} = -0{,}9$, aber $r_{xy} = -0{,}5$:

Monotoner Zusammenhang, aber nicht linear.

Übrigens: $r_{xy}^{(\mathrm{SP})}$ robust, r_{xy} nicht.



$r_{xy} = -0{,}5$ $\qquad$ $r_{xy} = -0{,}97$ $\qquad$ $r_{xy} = 0{,}74$

$r_{xy}^{(\mathrm{SP})} = -0{,}9$ $\qquad$ $r_{xy}^{(\mathrm{SP})} = -0{,}9$ $\qquad$ $r_{xy}^{(\mathrm{SP})} = 0{,}9$

$|r_{xy}^{(\mathrm{SP})}|$ ändert sich nicht bei monotoner Transformation.

Vorsicht: Interpretation von Korrelationen nicht einfach!

- r (mit kleinem Betrag) kann rein zufällig von Null verschieden sein. Ob zufällig oder nicht: Schließende Statistik (später)
- Eine Korrelation $r \neq 0$ sagt nichts über einen ursächlichen Zusammenhang. Viele Möglichkeiten:
  - x beeinflußt y.
  - y beeinflußt x.
  - x und y haben eine gemeinsame Ursache z.
  - Schein-Korrelationen, z.B.: Seien x, y, z unkorreliert. Dann sind x/z und y/z automatisch korreliert.
  - V.a. bei Zeitreihen: Unabhängige lineare Trends in x und y führen zu "Unsinns-Korrelationen". Beispiel:
    $x_i = \#$ Störche im Jahr $1900 + i$
    $y_i = \#$ Geburtenrate im Jahr $1900 + i$
    r_{xy} deutlich von Null verschieden $\Rightarrow$???