$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

<u>Binomialkoeffizient</u>:

$n! = n\cdot(n-1)!$, $0! := 1$ $\quad (1! = 1)$

$5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = 1, \quad \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

$$\boxed{\binom{n}{k} := 0 \text{ falls } k > n}$$

$$\Rightarrow \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{n-1} = n$$

"<u>Beweis</u>" der Binomialverteilung:

zunächst Bsp:

$$P[+-+++--++] \underset{\text{unabhängige Ereignisse}}{=} P[+]^6 P[-]^3$$

$$= p^6 (1-p)^3$$

$$P[X=k] = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{\text{Anordnung} \\ \text{von } k \text{ Erfolgen} \\ \text{und } n-k \text{ Misserfolgen} \\ \text{auf } n \text{ Positionen}}} \underbrace{p^k (1-p)^{n-k}}_{\substack{k \text{ Erfolge und } n-k \text{ Misserfolge} \\ \text{(s.o.)}}}$$

Binomialtest: "Spermasexing"

① $H_0: p = 0{,}7$

② $H_A: p > 0{,}7$

③ $X = \#$ ♀ bei $n = 12$ Versuchen

④ Verteilung von X falls H_0 gilt:

$$X \sim Bin(12; 0{,}7)$$

⑤ Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$

⑥ Verwerfungsbereich $K \stackrel{?}{=} \{12, 11, \ldots ?\}$

mit $P_{H_0}[X \in K] \leq \alpha = 5\%$

$$P_{H_0}[X = 12] = \binom{12}{12}(0{,}7)^{12}(0{,}3)^0 \approx 1{,}38\%$$

$P_{H_0}[X=11] = \binom{12}{11}(0{,}7)^{11}(0{,}3)^{1} \approx 6{,}55\%$

$K = \{12\}$

7 $X = 11$ (Test durchgeführt)

8 Testentscheidung: H_0 wird nicht verworfen

Zusatz:

9 p-Wert: $P_{H_0}[X \geq 11] \approx 7{,}9\%$

Vorzeichentest:

① H_0: Waage geeicht

② H_A: Waage nicht geeicht

③ Teststatistik: $T = \#\{\text{Werte} < 20\}$

④ $T \sim \text{Bin}(10, \frac{1}{2})$ daher Vorzeichentest

⑤ ⑥ } lasse weg, berechne gleich p-Wert

⑦ $T = 1$ beobachtet

⑨ p-Wert: $P_{H_0}[T \leq 1] + P_{H_0}[T \geq 9]$

$$= \left(\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}\right) 2^{-10}$$

$$\approx 2{,}15\,\%$$

⑧ H_0 wird z.B. auf 5%-Niveau verworfen

Faustregel von oben ergibt für $\alpha = 5\%$

$$K^c = \left[\frac{n}{2} - \sqrt{n}\,,\ \frac{n}{2} - \sqrt{n}\right] = \left[5 - \sqrt{10}\,,\ 5 + \sqrt{10}\right]$$

$$\approx [1{,}8\ ,\ 8{,}2] \not\ni 1 \quad \text{(richtiges Erg.)}$$

<u>obwohl</u> n nicht groß genug war

$$n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5 \not> \underline{9}$$