Würfel

Zeigt Würfel mit Wahrsch. $w = \frac{1}{6}$ die ⚂ ?

(A) Test mit Verwerfungsbereich

1. $H_0 : w = \frac{1}{6}$
2. $H_A : w \neq \frac{1}{6}$
3. $X = \#$ ⚂ aus 60 Würfen
4. $X \sim \mathrm{Bin}(60, \frac{1}{6})$
5. $\alpha = 5\%$
6. $P[X = k] = \binom{60}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{60-k} = \mathrm{binopdf}(k, 60, \frac{1}{6})$

$$P[X \leq k] = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{60}{\ell} \left(\frac{1}{6}\right)^\ell \left(\frac{5}{6}\right)^{60-\ell} = \mathrm{binocdf}(k, 60, \frac{1}{6})$$

$P[X \leq 4] \approx 2\% < 2{,}5\%$

$P[X \leq 5] \approx 5{,}1\% > 2{,}5\%$

$P[X \leq 16] \approx 98{,}4\% \Rightarrow P[X \geq 17] \approx 1{,}6\%$

$P[X \leq 15] \approx 96{,}6\% \Rightarrow P[X \geq 16] \approx 3{,}4\%$

$\Rightarrow K = \{0, 1, 2, 3, 4, 17, 18, \ldots, 60\}$

7. $X = 6$

8. $X \notin K$ also wird $\omega = \frac{1}{6}$ hier nicht verworfen.

(B) Test mit p-Wert

1. $H_0 : w = \frac{1}{6}$
2. $H_A : w \neq \frac{1}{6}$
3. X = # ⚅ in 60 Würfen
4. $X \sim \text{Bin}(60, \frac{1}{6})$
5. $\alpha = 5\%$
6. entfällt
7. $X = 6$
8. entfällt
9. $P[X \leq 6] = \text{binocdf}(6, 60, \frac{1}{6})$

   $\approx 10{,}8\% > 2{,}5\% \quad (= \frac{\alpha}{2})$
10. H_0 wird <u>nicht</u> verworfen, da $P[X \leq 6] > 2{,}5\%$

(c) Vertrauensintervall für ω?

Mit welcher Wahrsch. würfelt man denn nun ⚂?

$\frac{1}{6}$? $\frac{1}{10}$? .... ? $\rightsquigarrow$ Suche 95%-Vertr.Int.

1. $H_0: \omega = \omega_0$
2. $H_A: \omega \neq \omega_0$
3. $X = \#$ ⚂ aus 60 Würfen
4. $X \sim Bin(60, \omega_0)$
5. $\alpha = 5\%$ festgelegt durch "95%-Vertr.Int"
6. entfällt
7. $X = 6$
8. entfällt

9./10. $P[X \leq 6] \overset{?}{\leq} 2{,}5\%$ ← passiert, wenn ω_0 sehr groß wird

$P[X \geq 6] \overset{?}{\leq} 2{,}5\%$ ← passiert, wenn ω_0 sehr klein wird

$$P[X \leq 6] = \sum_{\ell=0}^{6} \binom{60}{\ell} \omega_0^{\ell} (1-\omega_0)^{60-\ell}$$

$$= \text{binocdf}(6, 60, \omega_0)$$

$$\overset{!}{=} 2{,}5\%$$

liefert den größte vernünftige Wert für ω_0

MATLAB Plot in Foliensatz 9

95%-Vertrauensintervall: $[3{,}8\%, \; 20{,}5\%]$

enthält sowohl 10% (rel. Häufigkeit) als auch 16,7% (faire Würfel)

Zentraler Grenzwertsatz

Bsp: $\mathrm{Bin}(n,p) \approx \mathcal{N}(np, np(1-p))$, $n \to \infty$

$X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathrm{Bin}(1,p)$

immer

$Y := X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathrm{Bin}(n,p)$

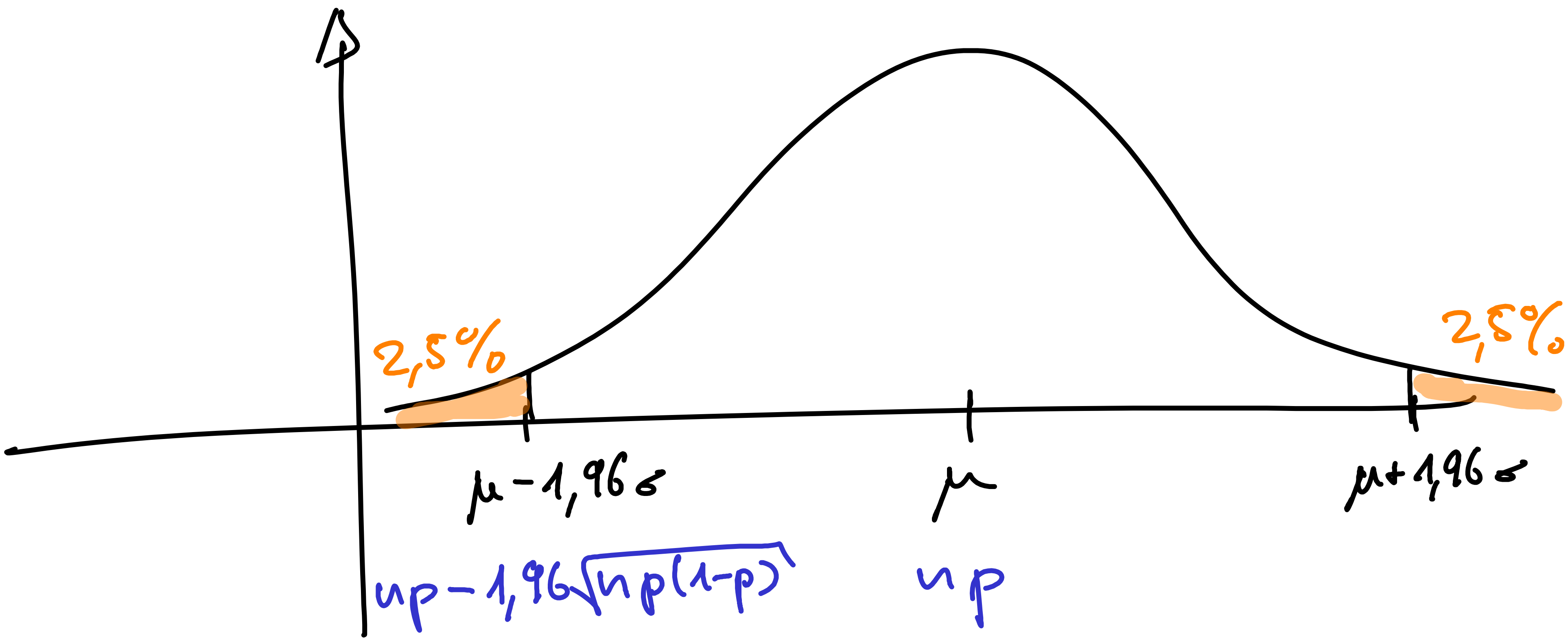
$E[Y] = np$, $\mathrm{Var}(Y) = np(1-p)$

$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$

n groß, laut ZGS

$\square$

Annahmebereich beim Binomialtest



$$X \sim \mathrm{Bin}(n,p) \approx N(np,\, np(1-p))$$

$$K^c = \left[np - \underbrace{1{,}96}\sqrt{np(1-p)},\; np + \underbrace{1{,}96}_{\approx 2}\sqrt{np(1-p)}\right]$$

enthält ungefähr 95% der Werte, die X annehmen kann.