Begründung für $\text{Pois}(\lambda) \approx N(\lambda, \lambda)$, $\lambda \to \infty$

$X_1, \dots, X_n \sim \text{Pois}(\lambda)$

immer

$X_1 + \dots + X_n \sim \text{Pois}(n\lambda)$

also gleich,

falls n groß

$X_1 + \dots + X_n \sim N(n\lambda, n\lambda)$

$n \to \infty$ (ZGS)

also $P(\tilde{\lambda}) \approx N(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})$

Wie schnell geht Mittelwert gegen Erwartungswert?

(Würfel)

Ergebnis $\in \{1,2,\dots,6\}$ des n-ten Würfelwurfs

$X_1, \dots, X_n$ diskret gleichverteilt auf $\{1,2,\dots,6\}$

$E(X_j) = 3{,}5$, $Var(X_j) \approx 3$

$\underline{Y} := X_1 + \dots + X_n \underset{\substack{n\to\infty \\ (ZGS)}}{\sim} \mathcal{N}(\underline{3{,}5n}, \underline{3n})$

Warum?

$E[\underline{Y}] = E[X_1 + \dots + X_n] = E[X_1] + \dots + E[X_n] = 3{,}5n$

$Var(\underline{Y}) = Var(X_1 + \dots + X_n) = Var(X_1) + \dots + Var(X_n)$

X_j unabhängig

$\approx 3n$

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \underline{Y}$$

$$E[\overline{X}] = E\left[\frac{1}{n} Y\right] = \frac{1}{n} E[Y] = 3{,}5$$

$$\operatorname{Var}(\overline{X}) = \operatorname{Var}\left(\frac{1}{n} Y\right) = \frac{1}{n^2} \operatorname{Var}(Y) \approx \frac{3}{n}$$

d. h.

$$\sigma \approx \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\left(\text{wobei } \overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2)\right)$

$n = 1000$

$$\sigma \approx \frac{1}{\sqrt{333}} \approx \frac{1}{18} \approx 0{,}05$$

$$P[\overline{X} \in [3{,}4 \; , \; 3{,}6]] \approx 95\%$$

für $n = 1000$

$\mu \pm 2\sigma$

z-Test Begründung für $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad , \quad \bar{X} = \frac{1}{n}\underbrace{\underbrace{(X_1 + \dots + X_n)}_{\text{normalverteilt lt. Vorauss.}}}_{\text{auch normalverteilt}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E[\bar{X}] = E[X_j] = \mu_0 \\ Var(\bar{X}) = \frac{1}{n} Var(X_j) = \frac{\sigma^2}{n} \end{array} \right.$$

falls H_0 wahr

siehe Rechnung für Würfel oben

also ist Z standardisierte Zufallsvariable,

d. h. $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

Begründung für Vertrauensintervall bei t-Test

$H_0: \mu = \mu_0$ wird angenommen falls

$$-t < \underbrace{\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}}_{=T} < t$$

$t_{df,1-\frac{\alpha}{2}}$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{ts}{\sqrt{n}} < \bar{x}-\mu_0 < \frac{ts}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{ts}{\sqrt{n}} - \bar{x} < -\mu_0 < \frac{ts}{\sqrt{n}} - \bar{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{x} - \frac{ts}{\sqrt{n}} < \mu_0 < \bar{x} + \frac{ts}{\sqrt{n}}$$

Begründung für erwartetes

$U^- \approx \frac{n(n+1)}{4}$ beim Wilcoxon-Test

Summe aller Ränge: $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$

Bestimme VZ der d_i durch Münzwurf

$\rightarrow$ Hälfte auf $\oplus$ und $\ominus$ | Größe des Rangs egal

also erwarte, daß $U^- \approx U^+ \approx$ Hälfte der Rangsumme