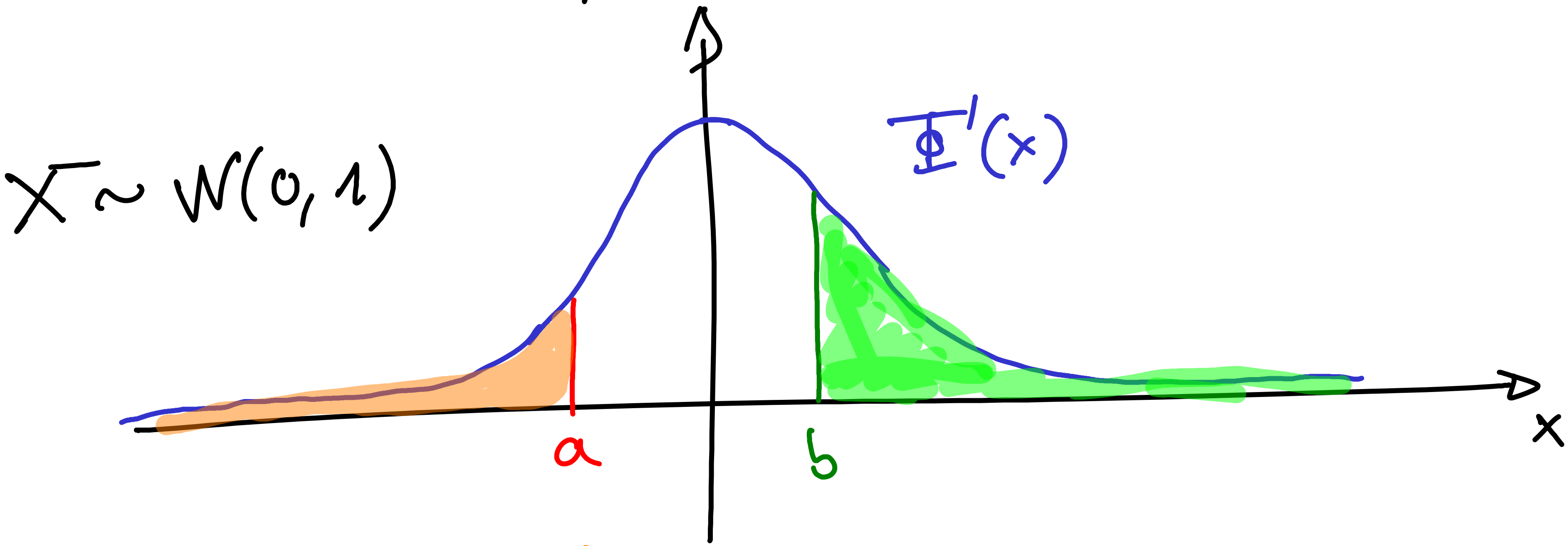
$\Phi(x)$: Verteilungsfkt. d. Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$



$$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} \Phi'(x)\,dx = \Phi(a) - \underbrace{\Phi(-\infty)}_{=0}$$

$$= \Phi(a)$$

$$\left(P(X \geq a) = 1 - \Phi(a) \right)$$

$$\mathbb{P}(X \geq b) = \int_b^\infty \Phi'(x)\,dx = \underbrace{\Phi(\infty)}_{=1} - \Phi(b)$$

$$= 1 - \Phi(b)$$

3. (19 Punkte) Die Durchschnittstemperatur an einem bestimmten Ort betrug am 1. Juni, 12 Uhr im langjÄahrigen Mittel 13.0 Grad Celsius. In den letzten beiden Jahren betrug die gemessene Temperatur zu diesem Zeitpunkt 19.0 bzw. 21.0 Grad Celsius. Belegen diese beiden Messungen, dass sich das Klima an diesem Ort erwÄarmt hat? Untersuchen Sie diese Frage mit Hilfe statistischer Tests. Wie lauten

H_0: mittlere Temp. am 1. Juni $T = 13°C$

H_A: $T > 13°C$

Teststat: $X = \#\{$gem. Werte $> 13°C\}$

$= 2$

$X \sim \text{Bin}(2, \frac{1}{2})$ falls H_0 stimmt

zwei Messungen

Wahrsch. für größer/kleiner Wert als 13°C (immer beim VZ-Test)

$$p\text{-Wert} = P(X \geq 2) = P(X = 2)$$

$$= \binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 25\%$$

da p-Wert $> 5\%$ $\Longrightarrow$ Test verwirft H_0 nicht!

angenommen wir hätte 1 beobachtet:

$$p\text{-Wert} = P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= 3/4 = 75\%$$

(8 Punkte) In einem Versuch werden 275 geklonte, r¨aumlich voneinander getrennte M¨ause t¨aglich mit Milch von an BSE erkrankten K¨uhen gef¨uttert. Es sei X die Anzahl an M¨ausen, die daraufhin Symptome einer BSE-¨ahnlichen Erkrankung zeigen. Wir bezeichnen mit p die (unbekannte) Wahrscheinlichkeit, dass eine Maus der untersuchten Art unter genau den obigen Versuchsbedingungen innerhalb des Untersuchungszeitraumes Symptome einer BSE-¨ahnlichen Erkrankung zeigt.

(a) (3 Punkte) Wie ist X verteilt?

(b) (2 Punkte) Mit welcherWahrscheinlichkeit entwickelt keine der Versuchsm¨ause innerhalb des Untersuchungszeitraumes BSE-¨ahnliche Symptome?

(c) (3 Punkte) Tats¨achlich entwickelte keine der 275 M¨ause BSE-¨ahnliche Symptome. Bestimmen Sie anhand dieser Beobachtung ein 95%-Vertrauensintervall f¨ur p zu einem Test der Nullhypothese H0 : p = p0 und der Alternativhypothese HA : p < p0.

a) $X \sim \mathrm{Bin}(275, p)$

b) $P[X=0] = \binom{275}{0} p^0 (1-p)^{275}$

$= (1-p)^{275}$

c) $H_0: p = p_0$, $H_A: p < p_0$

$p\text{-Wert} = P[X \leq 0] = P[X=0]$

Test nimmt an, falls

$$p\text{-Wert} > \alpha = 5\%$$

Signifikanzniveau

da wir ein 95%-VI suchen

$$(1-p_0)^{275} > 0{,}05$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-p_0 > (0{,}05)^{1/275}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_0 < 1-(0{,}05)^{1/275} \approx 0{,}01$$

also 95%-VI f. p: [0%, 1%]

(8 Punkte) Ein Patient leidet nach Meinung des behandelnden Arztes an genau einer der beiden Krankheiten A oder B. (Diese Krankheiten sollen sich gegenseitig ausschließen, d.h. man kann nicht gleichzeitig an beiden von ihnen leiden.) Dabei h¨alt es der Arzt f¨ur doppelt so wahrscheinlich, dass der Patient an A erkrankt ist wie an B.

(a) (2 Punkte) Welche Wahrscheinlichkeit sollte der Arzt daf¨ur annehmen, dass der Patient an der Krankheit A leidet?

Zur genaueren Diagnose f¨uhrt der Arzt am Patienten einen Test durch. Dieser Test f¨allt erfahrungsgem ¨aß mit Wahrscheinlichkeit 0.6 positiv aus, falls der Patient Krankheit A hat, und f¨allt mit Wahrscheinlichkeit 0.8 positiv aus, falls der Patient an B leidet.

(b) (2 Punkte) Schreiben Sie die beiden im letzten Satz enthaltenen Aussagen als mathematische Formeln ¨uber (bedingte) Wahrscheinlichkeiten.

(c) (4 Punkte) An diesem Patienten f¨allt der Test tats¨achlich positiv aus. Welche (darauf bedingte) Wahrscheinlichkeit sollte der Arzt nun daf¨ur annehmen, dass der Patient an der Krankheit A leidet?

a) $P[A] = 2P[B]$

$$1 = P[A \cup B] = P[A] + P[B] - \underbrace{P[A \cap B]}_{=0}$$

Patient hat eine der Krankheiten

man kann nicht beide Krankheiten haben

$$\Rightarrow P[B] = \frac{1}{3}, \quad P[A] = \frac{2}{3}$$

b) $P[\oplus]$ = Wahrsch. daß Test pos. ausfällt

$$P[\ominus] = 1 - P[\oplus]$$

$$P[\oplus | A] = 0{,}6$$

$$P[\oplus | B] = 0{,}8$$

c)

$$P[A|\oplus] = \frac{P[\oplus|A]\cdot P[A]}{P[\oplus|A]\cdot P[A] + P[\oplus|B]\cdot P[B]}$$

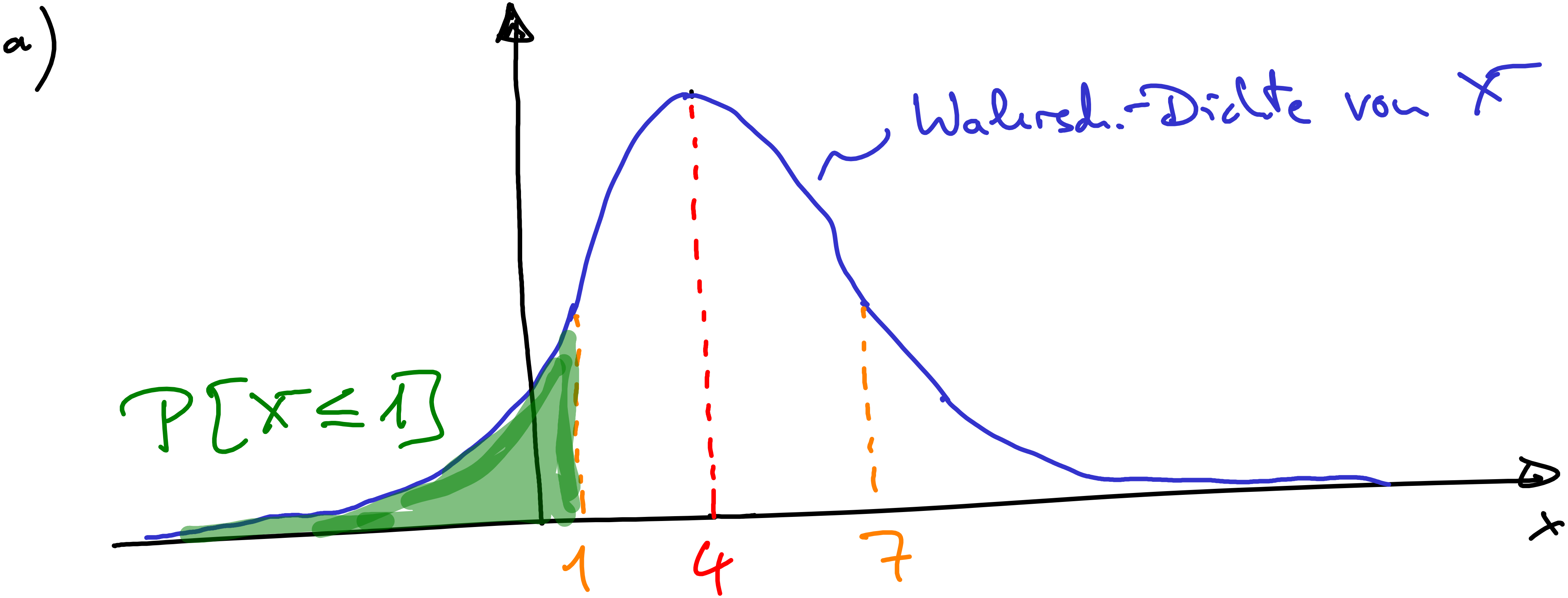
Satz v. Bayes

$$= \frac{0{,}6\cdot 2/3}{0{,}6\cdot 2/3 + 0{,}8\cdot 1/3} = \frac{2/5}{2/5 + 4/15} = \frac{6}{6+4}$$

$$= 0{,}6$$

(6 Punkte) Das Ergebnis X einer Messung sei normalverteilt mit Parametern $\mu = 4$ und $\sigma^2 = 9$.
(a) (3 Punkte) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte von X und tragen Sie in Ihre Skizze ein, wo die Wahrscheinlichkeit P[X 1] zu finden ist. ⟵ $P[X \leq 1]$
(b) (3 Punkte) Berechnen Sie P[X 1] mithilfe der beiliegenden Tabelle zur Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Zeigen Sie dabei Ihren Rechenweg.

a)



b) $X \sim \mathcal{N}(4, 9)$

$$Z := \frac{X-4}{3} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \text{standardisieren}$$

$$P[X \leq 1] = P\left[\frac{X-4}{3} \leq \frac{1-4}{3}\right]$$

$$= P[Z \leq -1] = \Phi(-1) \approx 16\%$$

(6 Punkte) Die Lebensdauer X eines bestimmten Produktes sei exponentialverteilt mit Parameter ®. (Zur Erinnerung: Damit ist die Verteilungsfunktion von X gleich FX(t) = 1−e−®t f¨ur t ¸ 0.) Der Hersteller des Produktes behauptet, dass ® (h¨ochstens) gleich 1/(100 Tage) sei, d.h. dass die erwartete Lebensdauer eines solchen Produktes (mindestens) 100 Tage betrage. Das einzige derartige Produkt, das Sie besitzen, geht jedoch bereits nach genau 10 Tagen kaputt. Sie vermuten daher, dass die Aussage des Herstellers zu optimistisch ist, und versuchen nun, mit dem beobachtetenWert X = 10Tage als Teststatistik einen Test durchzuf¨uhren, mit dem Sie eventuell Ihre Vermutung belegen und den Hersteller widerlegen k¨onnen. Bestimmen Sie dazu

(a) (1 Punkt) die Nullhypothese H0,
(b) (1 Punkt) die Alternativhypothese HA,
(c) (3 Punkt) den p-Wert und
(d) (1 Punkt) die Testentscheidung.

a) $H_0: \alpha = \frac{1}{100}$

b) $H_A: \alpha > \frac{1}{100}$

eigentlich $P[X \leq 10] = F_X(10)$

c) $P[\underbrace{X \leq 10}_{\text{eigentlich } 0 \leq X \leq 10}] = F_X(10) - \underbrace{F_X(0)}_{=0}$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{100}\cdot 10} - 0 = 1 - e^{-\frac{1}{10}}$$

$\approx 9{,}5\,\%$ ← p-Wert

d) Auf 5% Signifikanzniveau würde der Test <u>nicht</u> verwerfen, d.h. die Herstellerangabe <u>nicht</u> widerlegt werden.

Dichte

$$f_X(t) = \begin{cases} ct & , \ 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_0^2 f_X(t)\, dt = \frac{c}{2} 4 = 2c \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$P[X \leq 0{,}5 \mid X \leq 1]$$

$$= \frac{P[(X \leq 0{,}5) \cap (X \leq 1)]}{P[X \leq 1]}$$

$$= \frac{P[X \leq 0{,}5]}{P[X \leq 1]} = \frac{\int_0^{0{,}5} f_X(t)\, dt}{\int_0^1 f_X(t)\, dt}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (0,5)^2}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1)^2} = \frac{0,25}{1} = 25\%$$