Aufgabe 4 (2+3+5 = 10 Punkte)
In einer Bevölkerung gibt es 2% sogenannte “K-Personen”; das sind Personen, die den Erreger einer noch nicht ausgebrochenen Krankheit im Blut haben. Bei einem Schnelltest werden 94% der K-Personen als solche erkannt. Andererseits stuft der Test 3% der Nicht-K-Personen irrtümlicherweise als K-Personen ein. Eine (zufällig ausgewählte) Person werde getestet.
Betrachten Sie die Ereignisse:
K : = “Diese Person ist eine K-Person.”
T : = “Der Test stuft diese Person als K-Person ein.”
a) Drücken Sie die Bedeutung der (bedingten) Wahrscheinlichkeit P[K|T] in Worten aus.
b) Drücken Sie die drei im Aufgabentext bezifferten Wahrscheinlichkeiten mithilfe der mathematischen Notation ähnlich Aufgabenteil (a) aus.
c) Eine (zufällig ausgewählte) Person werde vom Test als Nicht-K-Person eingestuft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person dennoch eine K-Person ist? Drücken Sie hierzu die gesuchte Wahrscheinlichkeit ebenfalls mithilfe der Notation aus den Teilen (a) und (b) aus und berechnen Sie sie.

a) $P[K \mid T]$ = Wahrsch. dafür, dass die Person den Erreger hat, unter der Bed. eines pos. Testes.

b) $P[K] = 0{,}02 \qquad \Rightarrow P[K^c] = 0{,}98$

$P[T \mid K] = 0{,}94 \qquad \Rightarrow P[T^c \mid K] = 0{,}06$

$P[T \mid K^c] = 0{,}03 \qquad \Rightarrow P[T^c \mid K^c] = 0{,}97$

kann man schließen

c)

$$P[K \mid T^c] = \frac{P[T^c \mid K]\,P[K]}{P[T^c \mid K]\,P[K] + P[T^c \mid K^c]\,P[K^c]}$$

$$= \frac{0{,}06 \cdot 0{,}02}{0{,}06 \cdot 0{,}02 + 0{,}97 \cdot 0{,}98} \approx 0{,}13\,\%$$

$$P[K^c \mid T^c] = 1 - 0{,}13\text{‰}$$

Die Längen (in mm) von 15 verschiedenen Eiern einer bestimmten Kuckucksart sind
19,8 22,1 21,5 20,9 22 21 23,2 21 20,3 20,9 22 20 20,8 21,2 21 .
Untersuchen Sie – mithilfe statistischer Tests auf dem Signifikanzniveau 5% – ob die Annahme, dass diese Kuckuckseier im Mittel ungefähr 21,6mm lang sind, mit den Daten vereinbar ist.
Vielleicht helfen Ihnen dabei die folgenden Matlab-Zeilen:

```
>> X = [19.8 22.1 21.5 20.9 22 21 23.2 21 20.3 20.9 22 20 20.8 21.2 21];
>> mean(X) % Mittelwert
ans = 21.1800
>> var(X) % Stichprobenvarianz
ans = 0.7746
>> sqrt(var(X))
ans = 0.8801
>> hist(X,12)
```

a) Wie lautet die Nullhypothese?
b) Wie lautet die Alternativhypothese?
c) Führen Sie dazu einen t-Test durch:
Wie lautet die Formel für die Teststatistik? Berechnen Sie Ihren Wert.
Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich bzw. das Verwerfungskriterium.†
Wie entscheidet der Test?

a) $H_0$ : Die Eier sind im Mittel 21,6 mm lang.

$\mu = 21{,}6$ mm

b) $H_A$ : Die Eier sind im Mittel <u>nicht</u> 21,6 mm lang.

beidseitig

$\mu \neq 21{,}6$ mm

c) $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{N}}$

S: Stichprobenstandardabweichung

$S \approx 0{,}88$

N: Stichprobenumfang, $N = 15$

$\bar{x} = 21{,}18$

$$T = \frac{21{,}18 - 21{,}6}{0{,}88/\sqrt{15}} \approx -1{,}85$$

Verwerfungskriterium: $|T| \geq 2{,}145$

"Test nimmt an" / "Daten sind laut Test mit $H_0$ vereinbar"

Freiheitsgrade 14
(Stichprobenumfang − 1)

Führen Sie nun auch einen Wilcoxon-Test durch:
Berechnen Sie den Wert der Teststatistik (Rechenweg!)
Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich bzw. das Verwerfungskriterium.†
Wie entscheidet der Test?

d)

$$U^+ = 5 + 3 + 13{,}5 + 3 = 24{,}5$$

$$U^+ + U^- = \frac{(N+1)N}{2} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$$

$$U^- = 95{,}5$$

Verwerfungskriterium: $\min(U^+, U^-) \leq 25$

Stichprobenumfang 15, beidseitig

Verwerfungsbereich für $\min(U^+, U^-)$: $[0, 25]$

Verwerfungsbereich für $U^-$: $[0, 25] \cup [95, 120]$

$H_0$ wird verworfen.

e) Dem Wilcoxon-Test da der t-Test bei schlecht erfüllte Voraussetzung (Normalverteilung d. Daten) geringere Macht hat.

Sie möchten statistisch beweisen, dass Borkenkäfer durch ein bestimmtes Pheromon (Duftstoff) angelockt werden und führen dazu das im Folgenden schematisch skizzierte Experiment durch.

Vor der Tunnelöffnung 1 ist eine Duftstoffprobe platziert. Sie setzen n = 50 Käfer (einzeln) am linken Ende der Versuchsanordnung aus und zählen, wieviele die Anordnung durch die Öffnung 1 verlassen; diese Anzahl dient als Teststatistik und werde mit X bezeichnet.

a) Formulieren Sie die Nullhypothese H0 und die Alternativhypothese HA.
Hinweis: Bezeichnen Sie dazu mit p die (unbekannte) Wahrscheinlichkeit, dass ein Käfer die Vorrichtung durch die obere Öffnung verlässt. Überlegen Sie sich auch, ob Sie einen einseitigen oder eine zweiseitigen Test durchführen sollten.

a) $H_0: \; p = 0{,}5$

$H_A: \; p > 0{,}5$

einseitiger Test

b) Geben Sie die Verteilung der Teststatistik unter H0 an.
c) Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich K für auf dem Signifikanzniveau $\alpha$ 5%. Dabei hilft die Ausgabe des folgenden Matlab-Befehls:

b) $X \sim Bin(50, \frac{1}{2})$

c) $P[X \leq 30] = 0{,}9405$ (abgelesen)

$\Rightarrow \quad P[X \geq 31] = 0{,}0595 = 5{,}95\%$

$P[X \leq 31] = 0{,}9675$ (abgelesen)

$\Rightarrow P[X \geq 32] = 0{,}0325 = 3{,}25\%$

daher: Verwerfungsbereich $K = \{32, \ldots, 50\}$

d) Sie beobachten X = 36. Wie entscheidet Ihr Test?

d) $H_0$ wird verworfen (da $X = 36 \in K$)

e) Geben Sie außerdem den p-Wert an. Dabei hilft ebenfalls die Matlab-Ausgabe aus Teil (c).

$$\text{p-Wert} = P[X \geq 36]$$

$$= 1 - \underbrace{P[X \leq 35]}_{\text{ablesen}}$$

$$= 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$$

$(= 0{,}13\%)$

Für ein anderes Pheromon wissen Sie bereits, dass es Borkenkäfer anlockt. Ihr Experiment wurde von anderen Forschern auch für dieses Pheromon bereits 200 mal mit jeweils n = 50 Käfern durchgeführt. Die dabei beobachteten Werte für X sind im folgenden Histogramm dargestellt.

Wie hoch schätzen Sie, darauf basierend, für dieses Pheromon die Macht Ihres Tests?

1) aus Diagramm: Test nimmt in 5 von 200 Fällen (fälschlicherweise) an.

Macht des Tests $\approx \frac{195}{200}$ $(= 97{,}5\,\%)$

(Fehler 2. Art: $\frac{5}{200}$; Macht: $1 - \frac{5}{200}$)