Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 08

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 2 (Abgabe am 24.04.2008 **vor** der Vorlesung in N9))

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ der folgenden Differentialgleichungen. Berechnen Sie dazu zunächst die Lösungen der jeweiligen homogenen Gleichung. Eine partikuläre Lösung finden Sie dann entweder durch Raten oder durch Variation der Konstanten.

a) $y' + 5y = 7$ b) $y' + 5y = \mathrm{e}^{3x}$ c) $y' + \sin(x)y = 2\sin(x)$

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ der folgenden Differentialgleichungen. Geben Sie in Teil c) auch die Menge aller reellen Lösungen an.

a) $y'' + 3y' + 2y = 0$ b) $y'' + 4y' + 4y = 0$ c) $y'' + 4y' + 5y = 0$

Aufgabe 6 (10 Punkte)
Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y' + 5y = \mathrm{e}^{3x}, \quad y(0) = 5$ b) $y' + (1 + y^2)x^3 = 0, \quad y(0) = 1$

c) $y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

Aufgabe 7 (10 Punkte)
Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \ni \vec{x} \mapsto \vec{x}' = D_\phi \vec{x} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$D_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

bewirkt eine Drehung des Vektors $\vec{x}$.

a) Illustrieren Sie dies für $\phi = \frac{\pi}{6}$ und die Vektoren $(2, 0)^T$ und $(1, 1)^T$ mit einer Skizze.
b) Zeigen Sie: $D_\phi^{-1} = D_\phi^T = D_{-\phi}$ (d.h. $\vec{x} = D_{-\phi}\vec{x}'$).

Wir möchten nun die Menge

$$E = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{5}{8}(x^2 + y^2) + \frac{3}{4}xy = 1 \right\}$$

zeichen.

c) Drücken Sie die Bestimmungsgleichung in den gedrehten Koordinaten $(x', y')^T = D_\phi \vec{x}$ aus, und wählen Sie ϕ so, daß kein Term $x'y'$ auftritt.
d) Zeichen Sie E in einem xy-Koordinatensystem. Tragen Sie dazu zunächst das gedrehte $x'y'$-Koordinatensystem ein.

Hinweis: Die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ beschreibt eine Ellipse mit Halbachsen a und b.