

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 5 (Abgabe bis **Mittwoch, 21. Mai, 15:00 Uhr**,
durch Einwurf in die Box vor C6 P43 (C-Bau, 6. Niveau))

Aufgabe 15

(10 Punkte)

Führen Sie für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die HAT durch, d.h. geben Sie Matrizen U und V mit zugehörigen Diagonalmatrizen $\bar{U}^T A U$ und $\bar{V}^T B V$ an. Berechnen Sie außerdem e^{Ax} und e^{iBx} für $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 16

(10 Punkte)

Man nennt

$$\vec{y}' = A\vec{y}, \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Dabei sind die Elemente von \vec{y} Funktionen von x , und \vec{y}' ist die komponentenweise Ableitung nach x , d.h.

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}' = \frac{d\vec{y}}{dx} = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

- a) Zeigen Sie: Ist λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor \vec{u} , so ist

$$\vec{y}(x) = e^{\lambda x} \vec{u}$$

eine Lösung des DGL-Systems.

- b) Zeigen Sie: Jedes \vec{y} der Form

$$\vec{y}(x) = e^{Ax} \vec{b}, \quad \vec{b} \in \mathbb{C}^n \text{ beliebig,}$$

ist eine Lösung des DGL-Systems. Welchen Wert nimmt $\vec{y}(0)$ an?

- c) Wie lautet die Lösung des AWP's $\vec{y}' = A\vec{y}$, $\vec{y}(0) = (1 \ 0 \ 1)^T$, mit A aus Aufgabe 15?

Aufgabe 17

(10 Punkte)

Schreiben Sie die DGL 2. Ordnung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{*}$$

um auf ein DGL-System 1. Ordnung. Definieren Sie dazu

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix},$$

und suchen Sie eine Matrix A , so daß $\vec{y}' = A\vec{y}$ äquivalent zu (*) wird. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und vergleichen Sie mit dem charakteristischen Polynom der DGL (*).