Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 08

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 6 (Abgabe am 29.05.2008))

Aufgabe 18 (Spinpräzession im Magnetfeld) (10 Punkte)
Lösen Sie das folgende AWP für $\vec{y}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^2$.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t}(t)+\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} B_3 & B_1-\mathrm{i}B_2 \\ B_1+\mathrm{i}B_2 & -B_3\end{pmatrix}\vec{y}=0\,, \qquad \vec{y}(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Hinweis: Die Bezeichungen $\vec{B}:=\left(\begin{smallmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{smallmatrix}\right)$ und $B:=|\vec{B}|=\sqrt{B_1^2+B_2^2+B_3^2}$ sind hilfreich.

Aufgabe 19 (10 Punkte)

Man nennt $\quad \operatorname{tr} A:=\sum_{j=1}^{n} a_{jj} \quad$ die Spur der Matrix $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$.

a) Zeigen Sie: $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)\ \forall A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$. Daraus folgt natürlich $\operatorname{tr}(ABC)=\operatorname{tr}(CAB)=\operatorname{tr}(BCA)$ für $A,B,C\in\mathbb{C}^{n\times n}$ (warum?), die zyklische Vertauschbarkeit unter der Spur. Allerdings gilt i.A. $\operatorname{tr}(ABC)\neq\operatorname{tr}(BAC)$; geben Sie dafür ein Beispiel an.

b) Sei nun A hermitesch mit Eigenwerten $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Zeigen Sie: $\operatorname{tr} A=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j$.

c) Zeigen Sie außerdem, unter den Voraussetzungen aus (b), daß $\det A=\prod_{j=1}^{n}\lambda_j$.

d) Drücken Sie für $A\in\mathbb{C}^{2\times 2}$, symmetrisch, die Eigenwerte durch Spur und Determinante von A aus. Wie lautet dann das charakteristische Polynom $\chi_A(x)$?

Aufgabe 20 (10 Punkte)
Bringen Sie die quadratischen Formen in den folgenden Gleichungen auf Hauptachsen, geben Sie an, was für Kegelschnitte die Gleichungen beschreiben, und skizzieren Sie sie.

a) $-7x_1^2+2x_2^2+12x_1x_2=5$

b) $9x_1^2+6x_2^2+4x_1x_2=5$

c) $9x_1^2+6x_2^2+4x_1x_2=1$

d) $12x_1^2+36x_1x_2+27x_2^2=13$

Aufgabe 21 (10 Punkte)
Gegeben sei die quadratische Form

$$q_A(\vec{x})=x_1^2+8x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+2ax_2x_3\,, \qquad a\in\mathbb{R}$$

a) Für welche Werte von a ist q_A positiv definit? Welche Definitheitseigenschaften hat q_A für andere Werte von a?

b) Für welchen Wert von a ist $\vec{v}=(1,0,1)^T$ eine Hauptachsenrichtung von q_A (d.h. ein Eigenvektor von A)?

c) Bestimmen Sie für den a-Wert aus (b) die Hauptachsenform für q_A, d.h. bestimmen Sie eine Koordinatentransformation $\vec{y}=U^T\vec{x}$, U orthogonal, und eine Diagonalform q_D mit $q_A(\vec{x})=q_D(\vec{y})$.