Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 08

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 7 (Abgabe am 05.06.2008))

Aufgabe 22 (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & , \quad x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & , \quad x = y = 0 \end{cases} .$$

Berechnen Sie alle Richtungsableitungen in $\vec{0}$. Ist f in $\vec{0}$ stetig?

Aufgabe 23 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie die Richtungsableitung von $f(x,y,z) = x^2 + 2x\sin y + \mathrm{e}^{xyz}$ an der Stelle $\vec{x}_0 = (1,0,-1)^T$ in Richtung von $\vec{v} = (1,3,-4)^T$.

b) Es sei $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Berechnen Sie ∇f, und entscheiden Sie, ob f im Ursprung total differenzierbar ist.

c) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \mathrm{e}^x - y^3 + xyz$. Berechnen Sie ∇f.
Ist f total differenzierbar?
Berechnen Sie auch $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\vec{x}(t))$ für die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Aufgabe 24 (10 Punkte)

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{x}$ für

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} y\mathrm{e}^{xy} + 2x\cos(x^2+z^2) \\ x\mathrm{e}^{xy} \\ 2z\cos(x^2+z^2) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin^3 t \\ \sin^3 t + \cos^3 t \\ \frac{t}{\pi} \end{pmatrix} , \quad 0 \le t \le 2\pi .$$

Aufgabe 25 (10 Punkte)

Berechnen Sie $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{x}$ für $\vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$ und

a) $\mathfrak{K}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$,

b) $\mathfrak{K}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$,

c) $\mathfrak{K}_3$: Die geradlinige Verbindung von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.