Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 08

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 8 (Abgabe am 12.06.2008))

Aufgabe 26 (10 Punkte)

Welche der folgenden Felder sind konservativ? Geben Sie ggf. ein Potential an.

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{z}{x^2y} - \frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{z}{xy^2} + \frac{x}{x^2+y^2} \\ -\frac{1}{xy} \end{pmatrix}, \quad \vec{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y \\ x - z\sin z \\ x\cos(yz) \end{pmatrix}, \quad \vec{h}(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x^2+y} \\ \mathrm{e}^y \int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}$$

Aufgabe 27 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Taylorentwicklungen im Ursprung bis einschließlich des quadratischen Terms von $f(x,y) = \sin x \cos y$ und $g(x,y,z) = \mathrm{e}^x + \arctan y + z^3$.

b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von

$$f(x,y,z) = 5(x-1)yz^4 + 8y^2z^2 + x(z+1)^3$$

im Punkt $(1,1,-1)$. Hinweis: Sie müssen dazu nicht ableiten.

Aufgabe 28 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen der Funktion

$$f(x,y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2\,.$$

Geben Sie an, ob es sich um Minima oder Maxima handelt.

Aufgabe 29 (10 Punkte)

Wenn Sie $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ als vektorwertigen Differentialoperator betrachten, können Sie auch Skalarprodukte und, im $\mathbb{R}^3$, das Kreuzprodukt bilden.

Man definiert für $\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto (f_1(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x}))^T$ und $\vec{g}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\operatorname{div}\vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \quad \text{(Divergenz)} \quad \text{und} \quad \operatorname{rot}\vec{g} = \nabla \times \vec{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad \text{(Rotation)}$$

Berechen Sie (wo möglich) $\operatorname{div}\vec{f}$, $\operatorname{rot}\vec{f}$, $\operatorname{grad} V$, $\operatorname{div}\operatorname{grad} V$ und $\operatorname{rot}\operatorname{grad} V$ für

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y \\ x - z\sin z \\ x\cos(yz) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.$$