Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 08

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 10 (Abgabe am 26.06.2008)

Aufgabe 35 (10 Punkte)*

Bestimmen Sie die Masse m des inhomogenen Einheitswürfels $W = [0,1]^3$ mit Dichte

$$f(x,y,z) = x^2 z\, \mathrm{e}^{xyz} + y\, \mathrm{e}^{zy}\,,$$

d.h. berechnen Sie $m := \int_W f\,\mathrm{d}V$.

Aufgabe 36 (10 Punkte)*

a) Berechnen Sie das Volumen der Vollkugel mit Radius R,

$$K_R = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, |\vec{x}| \leq R \right\}.$$

b) Bestimmen Sie die Fläche der Ellipse

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+\,.$$

Aufgabe 37 (10 Punkte)*

a) Berechnen Sie das Volumenelement $\mathrm{d}V$ in Zylinderkoordinaten (r, φ, z), definiert durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie das Volumen, das vom Graph der Funktion

$$f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$$

und der xy-Ebene eingeschlossen wird.

Aufgabe 38 (parabolische Zylinderkoordinaten) (10 Punkte)*

Sei $\vec{x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\vec{x}(q_1, q_2, q_3) = \begin{pmatrix} q_1 q_2 \\ \frac{1}{2}(q_2^2 - q_1^2) \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (x, y, z: \text{ kartesisch}).$$

a) Zeigen Sie, daß $\vec{x}$ für alle q_1, q_2, q_3 mit $q_1^2 + q_2^2 \neq 0$ lokal invertierbar ist – dadurch also krummlinige Koordinaten definiert werden.

b) Sind diese Koordinaten orthogonal? Bilden Sie ein Rechtssystem? Wie lautet das Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ in diesen Koordinaten?

c) Sei

$$\widetilde{K} = \left\{ \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, 0 \leq q_j \leq 1\,,\ j = 1,2,3 \right\} \quad \text{und} \quad K = \vec{x}(\widetilde{K})\,.$$

Berechen Sie das Volumen $|K|$.

---

*Auf diesem Blatt gilt: 20 Punkte $\widehat{=}$ 100%, d.h. es können bis zu 20 Zusatzpunkte erreicht werden.