Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 08

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 11 (Abgabe am 03.07.2008)

Aufgabe 39 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie die Oberfläche einer Kugel mit Radius r. Parametrisieren Sie dazu die Oberfläche in Kugelkoordinaten (vgl. Vorlesungsbeispiele).

b) Berechnen Sie die Oberfläche des parabolischen Kegels

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = x^2 + y^2 \,, \quad x^2 + y^2 \leq 1 \right\} .$$

Hinweis: Es ist vielleicht sinnvoll, im letzten Schritt Polarkoordinaten einzuführen, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$.

Aufgabe 40 (10 Zusatzpunkte)

a) Berechnen Sie den Fluß von $\vec{f}(\vec{x}) = \dfrac{\alpha}{|\vec{x}|^3}\vec{x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

durch die Kugeloberfläche $\mathcal{F} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, |\vec{x}| = R\}$, $R > 0$.

b) Berechnen Sie den Fluß von $\vec{v}(x, y, z) = (y, x, z)^T$ durch den Sattel

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = x^2 - y^2 \,, \quad x^2 + y^2 \leq 1 \right\} .$$

Hinweis: Auch hier gilt der Hinweis aus 39b.

Aufgabe 41 (10 Punkte)

Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ergänzen Sie die folgenden Mengen von Teilmengen von Ω jeweils zur kleinstmöglichen Algebra $\mathcal{A}$ über Ω.

a) $\big\{\{1\}, \{2, 3, 4, 5\}\big\}$

b) $\big\{\emptyset, \{1, 2\}\big\}$

c) $\{A \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ mit } |A| = 2\}$

d) $\{A \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ mit } |A| = 5\}$

Aufgabe 42 (10 Zusatzpunkte)

Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{M}_1$ die Menge aller offenen Intervalle (a, b) aus $\mathbb{R}$ sowie
$\mathcal{M}_2$ die Menge aller abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$ aus $\mathbb{R}$.
Zeigen Sie: Die erzeugten σ-Algebren sind gleich[†], d.h. $\mathcal{A}^\sigma(\mathcal{M}_1, \Omega) = \mathcal{A}^\sigma(\mathcal{M}_2, \Omega)$.

[†]Es handelt sich nämlich in beiden Fällen um die Borel-σ-Algebra über $\mathbb{R}$.