

## Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 12 (Abgabe am 10.07.2008)

---

### Aufgabe 43

(10 Zusatzpunkte)

Sie sind eines von  $2n + 1$  Mitgliedern ( $n \in \mathbb{N}$ ) eines Gremiums, in dem eine Abstimmung durchgeführt wird. Jedes Mitglied kann mit "ja" oder "nein" stimmen (Enthaltungen sind nicht möglich), die einfache Mehrheit entscheidet. Nehmen sie an, dass jedes der  $2n$  anderen Mitglieder sich zufällig für "ja" oder "nein" entscheidet.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Ihre eigene Stimme den Ausschlag gibt?
- Nähern Sie die Fakultäten im Ergebnis von Teil (a) für große  $n$  durch die Stirlingsche Formel (vgl. Vorlesung, Kapitel 3),

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Wie sinkt demnach Ihr Einfluss mit wachsender Größe des Gremiums, d.h. für große  $n$ ?

- 2007 setzte sich Polen dafür ein, die Anzahl der Stimmen, die ein Mitgliedsstaat im Rat der Europäischen Union hat, proportional zur Wurzel der Bevölkerungszahl zu wählen. War dies ein sinnvoller und fairer Vorschlag? Begründen Sie Ihre Antwort.

### Aufgabe 44

(10 Punkte)

- Nach dem Verpacken von sechs verschiedenen Geschenken kann Georg den Inhalt nicht mehr erkennen. Eines war für Klaus, zwei für Lothar und drei für Susanne. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei zufälliger Verteilung der Geschenke (in der richtigen Anzahl!) jeder die richtigen erhält?
- Wir zeigen: Sind die Ereignisse  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  paarweise unabhängig, d.h.

$$P(A_j \cap A_k) = P(A_j) P(A_k) \quad \forall j \neq k$$

so folgt daraus **nicht**  $P\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) = \prod_{j=1}^n P(A_j)$ .

BEISPIEL: Ein fairer Würfel werde zweimal geworfen. Wir betrachten die Ereignisse

$A_1$  = "der erste Wurf liefert eine gerade Zahl",

$A_2$  = "der zweite Wurf liefert eine ungerade Zahl" und

$A_3$  = "die Summe der beiden Augenzahlen ist gerade".

Berechnen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

**Aufgabe 45**

(10 Zusatzpunkte)

Drei Schützen treffen sich zu einem Duell. Sie ordnen sich an den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks an und vereinbaren die folgenden Regeln: Den ersten Schuß hat  $A$ , dann  $B$ , dann  $C$ , dann wieder  $A$  und so weiter. Ist einer getroffen, so setzen die anderen beiden das Duell fort. Die Trefferwahrscheinlichkeit von  $A$  ist 0,3, die von  $B$  1,0 und die von  $C$  0,5. Jeder Schütze entscheidet, wenn er an der Reihe ist, selbst, wohin er den Schuß richtet – auf einen der Gegner oder in die Luft. Alle sind gute Mathematiker und treffen immer die Entscheidung, die ihnen maximale Überlebenschancen verspricht. Wohin richtet  $A$  seinen ersten Schuß? Wie hoch sind die Überlebenschancen für  $A$ ,  $B$  und  $C$ ?

**Aufgabe 46**

(10 Punkte)

Eine Krankheit trete bei 1% der Bevölkerung auf (Prävalenz). Ein Labortest liefert bei 98% der Kranken ein positives Ergebnis (Sensitivität). Derselbe Test liefert bei 95% der Gesunden ein negatives Ergebnis (Spezifität). Wir möchten folgende Frage beantworten:

*Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (einer zufällig getesteten Person), krank zu sein, wenn der Test positiv ist?*

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- a) Geben Sie wie beim Gefangenenparadoxon aus der Vorlesung eine geeignete Ergebnismenge  $\Omega$  an.

Bezeichnen Sie mit  $A_1$  das Ereignis, daß die untersuchte Person die Krankheit hat, mit  $A_2$  das Ereignis, daß die untersuchte Person die Krankheit nicht hat (also  $A_2 = A_1^C$ ) und mit  $B$  das Ereignis, daß der Test positiv ausfällt.

- b) Geben Sie alle Wahrscheinlichkeiten und alle bedingten Wahrscheinlichkeiten an, die sich unmittelbar aus dem Aufgabentext ergeben.
- c) Bestimmen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit mithilfe des Satzes von Bayes.
- d) Geben Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß der Test bei einer zufällig ausgewählten Person positiv ausfällt.