$\boxed{1}$

a) $$\int \cos^3 x \, dx \underset{\text{P.I.}}{=} \sin x \cos^2 x + \int \sin x \cdot 2 \cdot \cos x \sin x \, dx$$

$$= \sin x \cos^2 x + 2 \int \cos x \, dx$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$- 2 \int \cos^3 x \, dx$$

$$\Rightarrow \int \cos^3 x \, dx = \frac{1}{3} \left(\sin x \cos^2 x + 2 \sin x \right)$$

b) $$\int_2^\infty \frac{2x-1}{(x^2-1)x^2} \, dx$$

Nennernullstellen: 0 (doppelt), $1, -1$

$$\frac{2x-1}{(x^2-1)x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}$$

- x^2, $x \to 0$: $\frac{-1}{-1} = B$ also $B = 1$
- $(x-1)$, $x \to 1$: $\frac{1}{2 \cdot 1} = C$ also $C = \frac{1}{2}$
- $(x+1)$, $x \to -1$: $\frac{-3}{-2 \cdot 1} = D$ also $D = \frac{3}{2}$
- x, $x \to \infty$: $0 = A + C + D$ also $A = -2$

damit

$$\int_2^\infty \frac{2x-1}{(x^2-1)x^2} \, dx = \int_2^\infty \left(\frac{-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{3/2}{x+1} \right) dx$$

$$= \left[-2 \log x - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \log(x-1) + \frac{3}{2} \log(x+1) \right]_2^\infty$$

$$= \left[-\frac{1}{x} + \log \frac{(x-1)^{1/2} (x+1)^{3/2}}{x^2} \right]_2^\infty$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{2} + \log \frac{1^{1/2} \; 3^{3/2}}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{2} + 2 \log 2 - \frac{3}{2} \log 3$$

$\boxed{2}$

a) getrennte Veränderliche

$$y' + 2x\,e^{-x^2}(1+y^2) = 0 \quad , \quad y(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{1+y^2} = -2x\,e^{-x^2}\,dx \quad , \quad y(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^y \frac{d\tilde{y}}{1+\tilde{y}} = \int_0^x (-2\tilde{x}\,e^{-\tilde{x}^2})\,d\tilde{x}$$

$$\Leftrightarrow \arctan y = e^{-x^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow y = \tan\left(e^{-x^2} - 1\right)$$

b) charakteristisches Polynom:

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 \overset{!}{=} 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

reelle Lösungen:

$$y(x) = c_1 e^{-x} \sin x + c_2 e^{-x} \cos x \quad , \quad c_{1,2} \in \mathbb{R}$$

c) Ansatz für partikuläre Lösung:

$$y = A \sin x + B \cos x$$

$$\Rightarrow y' = A \cos x - B \sin x \quad , \quad y'' = -A \sin x - B \cos x$$

in DGL:

$$\underline{-A \sin x} - B\cos x + 2A\cos x \underline{- 2B \sin x}$$
$$\underline{+ 2A \sin x} + 2B \cos x = \underline{\sin x}$$

also (i) $A - 2B = 1$, (ii) $2A + B = 0$

d.h. (ii) $\Rightarrow B = -2A$ in (ii) $5A = 1$

und damit $A = \frac{1}{5}$, $B = -\frac{2}{5}$

$\boxed{\text{zu } 2}$

zu c) reelle Lösungen:

$$y = \frac{1}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x + c_1 e^{-x}\sin x + c_2 e^{-x}\cos x$$

$$c_{1,2} \in \mathbb{R}$$

d) für die Lös. aus c gilt:

$$y(0) = -\frac{2}{5} + c_2 \stackrel{!}{=} -\frac{2}{5} \implies c_2 = 0$$

$$y'(0) = \frac{1}{5} + c_1 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{5} \implies c_1 = -\frac{2}{5}$$

d.h. $y(x) = \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}e^{-x}\right)\sin x - \frac{2}{5}\cos x$ löst AWP

$\boxed{3}$

a) charakteristisches Polynom

$$\chi_A(\lambda) = [(1-\lambda)^2 - (-1)^2][(-1-\lambda)^2 - 1^2]$$
$$= (\lambda^2 - 2\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda)$$
$$= \lambda^2 (\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (doppelt), $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = -2$

Eigenvektoren zu 0:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und Linearkombinationen

Eigenvektoren zu λ_3:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und Vielfache

Eigenvektoren zu λ_4:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und Vielfache

b)

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$U^T A U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{zu } 3}$

c) $\vec{y}(0) = -\vec{u}_3$ also löst

$$\vec{y}(x) = -e^{\lambda_3 x}\vec{u}_3 = e^{2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

das AWP.

$\boxed{4}$ $6x^2 + 4xy + 9y^2 = (x,y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

mit $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$

Eigenwerte von A:

$$\det(A - \lambda I) = (6-\lambda)(9-\lambda) - 4$$

$$= \lambda^2 - 15\lambda + 50 \overset{!}{=} 0$$

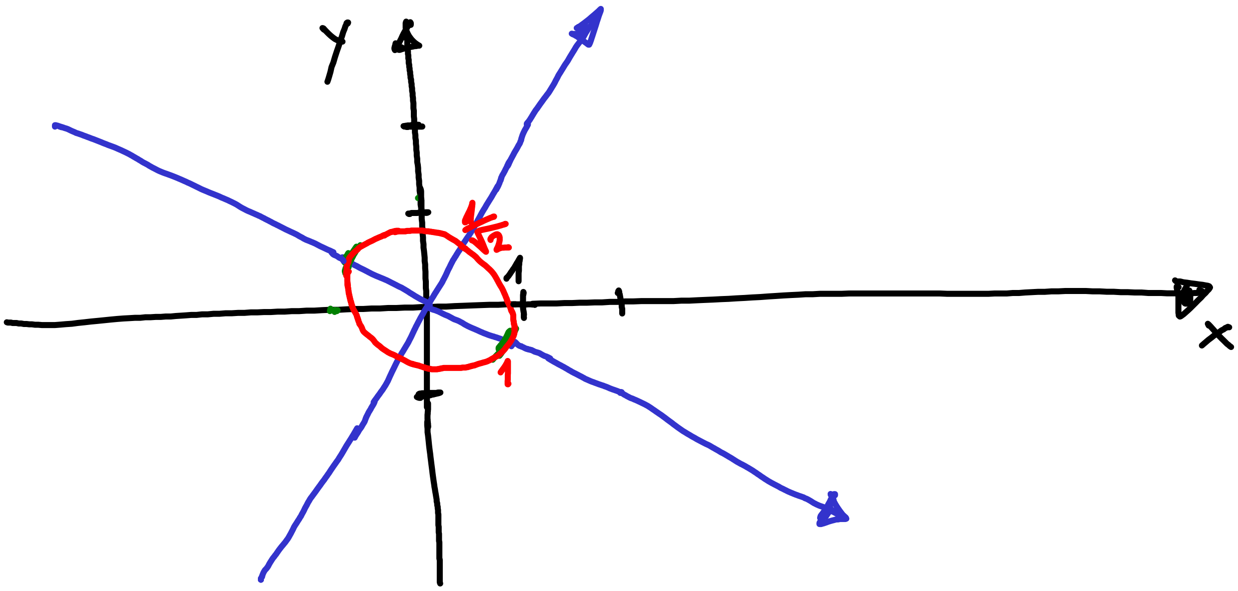
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 200}}{2} = \frac{15 \pm 5}{2} = \begin{cases} 10 \\ 5 \end{cases}$$

Die Gleichung beschreibt eine Ellipse (beide EWe positiv) mit Hauptachsen 1 und $\cancel{\sqrt{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Zugehörige Eigenvektoren:

zu λ_1: $\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und Vielfache

zu λ_2: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und Vielfache



$\boxed{5}$ $f(x,y,z) = e^x\cos(\pi y) + zx^2$

a) $f_x = e^x \cos(\pi y) + 2zx$

$f_y = -\pi e^x \sin(\pi y)$

$f_z = x^2$

alle stetig $\forall (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ f überall total diffbar mit

$$\nabla f = \left(e^x\cos(\pi y) + 2zx, -\pi e^x \sin(\pi y), x^2\right)$$

b) $\vec{v}_0 := \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_0}(1,1,1) = (2-e, 0, 1)\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \frac{5-e}{\sqrt{14}}$$

c) 1. Möglichkeit: Ableiten

$f(0,0,0) = 1$, $f'(0) = (1,0,0)$

$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^x\cos(\pi y) + 2z & -\pi e^x \sin(\pi y) & 2x \\ -\pi e^x \sin(\pi y) & -\pi^2 e^x \cos(\pi y) & 0 \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f''(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ und damit...

$$f(x,y,z) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}y^2 + \dots$$

$\boxed{\text{zu 5c}}$ 2. Möglichkeit: Bekannte Reihen verwenden

$$f(x,y,z) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots\right)\left(1 - \frac{\pi^2 y^2}{2} + \ldots\right) + \ldots$$

zx² ist bereits von kubischer Ordnung

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2 y^2}{2} + \ldots$$

$\boxed{6}$

a) Suche Potential $V(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$

$$V = \int (2xy - y^2)\,dx = x^2y - y^2x + h_1(y,z)$$

$$= \int (x^2 - 2xy)\,dy = x^2y - xy^2 + h_2(x,z)$$

$$= \int \cos z \,dz = \sin z + h_3(x,y)$$

mit $h_1 = h_2 = \sin z$, $h_3 = x^2y - xy^2$

$\Rightarrow$ $V(x,y,z) = x^2y - xy^2 + \sin z$ ist Potential

& geht von $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix}1\\0\\1-e^{-4\pi^2}\end{pmatrix}$

und damit $\int_{\mathcal{C}} \vec{f}\,d\vec{x} = \sin\left(1 - e^{-4\pi^2}\right)$

b) $$\int_{\mathcal{C}} \vec{f}\,d\vec{x} = \int_0^{2\pi} \vec{f}(\vec{x}(t))\,\dot{\vec{x}}(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{\begin{pmatrix} -\cos^2 t \sin t - \sin^3 t \\ \cos^3 t + \cos t \sin^2 t \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \text{ da } \sin^2 t + \cos^2 t = 1} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = 2\pi$$

$\boxed{7}$ $f'(x,y) = (4x^3 - 4x\ ,\ \sinh y)$

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & \cosh y \end{pmatrix}$$

notwendige Bedingung: $f' = (0,0)$

$\Leftrightarrow \quad 4x^3 - 4x = 0 \quad$ und $\quad \sinh y = 0$

$\Leftrightarrow \quad x(x^2 - 1) = 0 \quad$ und $\quad y = 0$

potentielle Extrema bei $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$

Funktionswerte: $f(0,0) = 1$, $f(1,0) = 0 = f(-1,0)$

Art des kritischen Punkts:

$f''(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ indefinit, also Sattel

$f''(1,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pos. definit, also Minimum

$f''(-1,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ——— // ———

$\boxed{8}$ Schreibe Glu. als

$$F(x,y,z) := xyz + x^2\cos z - e^{1-y} = 0$$

auflösbar nach z, falls $F_z \neq 0$

$$F_z(x,y,z) = xy - x^2\sin z$$

$F_z(1,1,0) = 1$ also auflösbar in Umgeb. von $(1,1,0)$

$$f'(1,1) = -\left[F_z(1,1,0)\right]^{-1}\cdot\left(F_x(1,1,0), F_y(1,1,0)\right)$$

mit $F_x(x,y,z) = yz + 2x\cos z$ und

$F_y(x,y,z) = xz + e^{1-y}$ gilt

$$f'(1,1) = -(2,1)$$

$\boxed{9}$ $$\int_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dV$$

in Kugelkoordinaten

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^3} \, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$= 4\pi \left[\frac{-e^{-r^3}}{3} \right]_0^{\infty} = \frac{4\pi}{3}$$

$\boxed{10}$

$$\mathcal{F} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 2u^2 - v^2 \end{pmatrix} \,\middle|\, |u| \leq 1,\ |v| \leq 1 \right\}$$

$$\vec{x}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4u \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{pmatrix} -4u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$dO = \sqrt{1 + 16u^2 + 4v^2}\, du\, dv$$

a) $$\int_{\mathcal{F}} dO = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 16u^2 + 4v^2}\, du\, dv$$

Ab hier wird es leider unschön, deshalb wurde der Aufgabe nachträglich gestrichen, bzw. gab es bereits bis hier alle Punkte.

b) $$\int_{\mathcal{F}} \vec{f}\, d\vec{O} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 2u^2 - v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix} du\, dv$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(-2u^2 + v^2\right) du\, dv$$

$$= 2\left[-\frac{2}{3}u^3\right]_{-1}^{1} + 2\left[\frac{v^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{8}{3} + \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$$

$\boxed{11}$ a) Definiere ein paar Ereignisse

A = erstes ausgewähltes Bild ist ein Orginal

und damit

A^c = ———— " ———— eine Fälschung

B = Expertin hält erstes Bild für Original

B^c = ———— " ———— Fälschung

Wahrscheinlichkeiten aus dem Text:

$$P(A) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}, \quad P(A^c) = \frac{1}{6}$$

$$P(B|A) = \frac{9}{10} = P(B^c|A^c)$$

$$P(B^c|A) = \frac{1}{10} = P(B|A^c)$$

gesuchte Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A|B^c) \underset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(B^c|A)\,P(A)}{P(B^c|A)P(A) + P(B^c|A^c)P(A^c)}$$

$$= \frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{5}{6}}{\frac{1}{10}\cdot\frac{5}{6} + \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{6}} = \frac{5}{5+9} = \frac{5}{14}$$

und damit auch

$$P(A^c|B^c) = 1 - P(A|B^c) = \frac{9}{14}$$

oder mit Bayes

$$P(A^c|B^c) = \frac{P(B^c|A^c)P(A^c)}{P(B^c|A^c)P(A^c) + P(B^c|A)P(A)}$$

$$= \frac{\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{10}\cdot\frac{5}{6}} = \frac{9}{14}$$

$\boxed{\text{Zu 11}}$ Zu a)

Unter der Bedingung, daß die Expertin das Bild für eine Fälschung hält, ist es mit Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{14}$ $\left(\frac{9}{14}\right)$ ein Original (eine Fälschung).

b) 2 Möglichkeiten:

(i) Das erste Bild (welches abgelehnt wurde) war ein Original; dann sind 9 der verbleibende 11 Bilder Originale

(ii) ... war eine Fälschung; dann sind 10 der verbleibende 11 Bilder Originale.

Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P(A \mid B^c) \cdot \frac{9}{11} + P(A^c \mid B^c) \cdot \frac{10}{11}$$

$$= \frac{5}{14} \cdot \frac{9}{11} + \frac{9}{14} \cdot \frac{10}{11} = \frac{45+90}{154} = \frac{135}{154}$$