Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 08

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Klausur am 21.7.2008

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 110 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (3+10 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int \cos^3 x \, dx$ b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{2x-1}{(x^2-1)x^2} \, dx$ Hinweis: Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 2 (4+4+4+3 Punkte)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP)
$$y' + 2x e^{-x^2}(1+y^2) = 0\,, \qquad y(0) = 0\,.$$

b) Geben Sie alle reellen Lösungen der folgenden homogenen DGL an,
$$y'' + 2y' + 2y = 0\,.$$

c) Geben Sie alle reellen Lösungen der folgenden inhomogenen DGL an,
$$y'' + 2y' + 2y = \sin x\,.$$

d) Lösen Sie das AWP $\quad y'' + 2y' + 2y = \sin x\,, \quad y(0) = -\frac{2}{5}\,, \quad y'(0) = -\frac{1}{5}.$

Aufgabe 3 (7+3+3 Punkte)
Sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

b) Geben Sie eine Matrix U an, so daß $U^T A U$ diagonal ist; geben Sie auch die zugehörige Matrix $U^T A U$ explizit an.

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem
$$\vec{y}\,'(x) = A\,\vec{y}(x)\,, \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Bringen Sie die quadratische Form in

$$6x^2 + 4xy + 9y^2 = 5$$

auf Hauptachsen, geben Sie an, was für ein Kegelschnitt durch die Gleichung beschrieben wird, und skizzieren Sie ihn.

Aufgabe 5 (3+2+4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) = \mathrm{e}^x \cos(\pi y) + zx^2 .$$

a) Wo ist f total differenzierbar? Berechnen Sie dort ∇f.
b) Berechnen Sie die Ableitung von f an der Stelle $\vec{x}_0 = (1, 1, 1)^T$ in Richtung von $\vec{v} = (1, 2, 3)^T$.
c) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von f im Ursprung bis einschließlich des quadratischen Terms. Das Ergebnis soll keine Vektoren oder Matrizen mehr enthalten.

Aufgabe 6 (5+5 Punkte)
Bestimmen Sie die Kurvenintegrale $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\, \mathrm{d}\vec{x}$ für

a) $\vec{f} = \begin{pmatrix} 2xy - y^2 \\ x^2 - 2xy \\ \cos z \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 - \mathrm{e}^{-t^2} \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi$ und

b) $\vec{f} = \begin{pmatrix} -x^2y - y^3 \\ x^3 + xy^2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

Aufgabe 7 (9 Punkte)
Bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima, sowie alle Sattelpunkte von

$$f(x, y) = x^4 - 2x^2 + \cosh y ,$$

d.h. geben Sie jeweils die kritische Stelle, den Funktionswert an der kritischen Stelle und die Art des kritischen Punkts (Minimum, Maximum oder Sattel) an.

Aufgabe 8 (6 Punkte)
Zeigen Sie, daß sich

$$xyz + x^2 \cos z = \mathrm{e}^{1-y}$$

in einer Umgebung von $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$ nach $z = f(x, y)$ auflösen lässt, und berechnen Sie $f'(1, 1)$.

Aufgabe 9 (6 Punkte)
Berechnen Sie $\displaystyle\iiint_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, \mathrm{d}V.$

Aufgabe 10 (6+6 Punkte)

Die Fläche $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\mathcal{F} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = 2x^2 - y^2\,,\ |x| \leq 1\,,\ |y| \leq 1 \right\}.$$

a) ~~Berechnen Sie die Oberfläche $O(\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{F}} \mathrm{d}O$.~~

b) Bestimmen Sie den Fluß von $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}$ durch $\mathcal{F}$, d.h. berechnen Sie $\int_{\mathcal{F}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{O}$.

Aufgabe 11 (5+2 Punkte)

Bei einer Kunstausstellung werden 12 Gemälde gezeigt, von denen 10 Originale sind. Ein Kunstsammler wählt zufällig ein Bild aus, befragt aber, bevor er es kauft, eine Expertin. Diese gibt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$ eine richtige Beurteilung ab. Wenn die Expertin das Bild für eine Fälschung hält, gibt der Sammler es zurück und wählt ein anderes.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein von der Expertin als Fälschung deklariertes Bild ein Original, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Fälschung?

b) Wenn ein zweites Bild ausgewählt wird, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dieses dann ein Original?