Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 08

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Nachklausur am 8.10.2008

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 111 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^\infty \frac{1-x}{x^3+2x^2}\,\mathrm{d}x\,. \qquad \text{Hinweis: Partialbruchzerlegung}$$

Aufgabe 2 (4+4+2+4 Punkte)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP)

$$y'(x) = a\big(5-y(x)\big)^2\,, \qquad y(0)=0 \qquad \text{für} \quad a \neq 0$$

und bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$, falls existent.

b) Geben Sie alle Lösungen der folgenden homogenen DGL an,

$$y'' + 2y' + y = 0\,.$$

c) Lösen Sie das AWP $\quad y'' + 2y' + y = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0.$

d) Geben Sie alle Lösungen der folgenden inhomogenen DGL an,

$$y'' + 2y' + y = x\,.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Die 2×2-Matrix A besitze die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $\vec{u}_1 = (1,-1)^T$ und $\vec{u}_2 = (1,1)^T$. Wie lautet die Matrix A?

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\cos(\frac{\pi}{2}A)$.

Zur Erinnerung: $\cos(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} x^{2\nu}$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Bringen Sie die quadratische Form in

$$\frac{3}{5}x^2 + \frac{8}{5}xy - \frac{3}{5}y^2 = 1$$

auf Hauptachsen, geben Sie an, was für ein Kegelschnitt durch die Gleichung beschrieben wird, und skizzieren Sie ihn.

Aufgabe 6 (9 Punkte)

Bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima, sowie alle Sattelpunkte von

$$f(x,y) = \cos(x) + y^2 - 1$$

d.h. geben Sie jeweils die kritische Stelle, den Funktionswert an der kritischen Stelle und die Art des kritischen Punkts (Minimum, Maximum oder Sattel) an.

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \int_{\frac{\log y}{y^2}}^1 y^3 \mathrm{e}^{xy^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Aufgabe 8 (3+2+3 Punkte)

Sei $\vec{x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\vec{x}(q_1,q_2,q_3) = \begin{pmatrix} q_1q_2 \\ \frac{1}{2}(q_2^2 - q_1^2) \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (x,y,z: \text{ kartesisch})\,.$$

a) Zeigen Sie, daß $\vec{x}$ für alle q_1,q_2,q_3 mit $q_1^2 + q_2^2 \neq 0$ lokal invertierbar ist – dadurch also krummlinige Koordinaten definiert werden.
b) Wie lautet das Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ in diesen Koordinaten?
c) Sei

$$\widetilde{K} = \left\{ \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \middle| \, 0 \le q_j \le 1\,,\ j = 1,2,3 \right\} \quad \text{und} \quad K = \vec{x}(\widetilde{K})\,.$$

Berechen Sie das Volumen $|K|$.

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von

$$f(x,y,z) = \sin(x)\cos(y) + \mathrm{e}^{yz} + (x+z)^5$$

im Ursprung bis einschließlich des quadratischen Terms. Das Ergebnis soll keine Vektoren oder Matrizen mehr enthalten.

Aufgabe 10 (8 Punkte)

Bestimmen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{x}$ für

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \mathrm{e}^{xyz}\,, \qquad \mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin t \\ -t^2 \end{pmatrix}\,, \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\,.$$

Aufgabe 11 (8 Punkte)

Berechnen Sie den Fluß von

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{durch} \quad \mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = x^2 - y^2\,,\;\; |x| \le 1\,,\; |y| \le 1 \right\}\,,$$

d.h. berechnen Sie das Integral $\int_{\mathcal{F}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{O}$.

Aufgabe 12 (3+7 Punkte)

Sie würfeln einmal mit einem (fairen) 20er Würfel und bestimmen so den Wert der Zufallsvariablen X_1 (d.h. $X_1(\Omega) = \{1, 2, \ldots, 20\}$). Erhalten Sie beim ersten Wurf eine 1, so würfeln Sie nochmals mit demselben Würfel und bestimmen so den Wert von X_2. Für $2 \le X_1 \le 10$ würfeln Sie mit einem (fairen) 6er Würfel und bestimmen so den Wert von X_2. In allen anderen Fällen ($X_1 \ge 11$) würfeln Sie nicht noch einmal – der Wert von X_2 ist dann Null.

a) Sind X_1 und X_2 stochastisch unabhängig? Falls nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

b) Berechnen Sie $P(X_2{=}3)$, $P(X_2{\ge}2)$ sowie $E(X_2)$.