Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2008
15.04.2008
Blatt 01

Übungen zu
„Mathematik IV für Physiker“

1. (a) Sei $n \in \mathbf{N}$. Zeigen Sie, dass es genau n verschiedene n-te Einheitswurzeln $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \mathbf{C}$ gibt, d.h. Lösungen der Gleichung $z^n = 1$.

   (b) Sei $a \in \mathbf{C}^*$. Zeigen Sie, dass es genau n verschiedene n-te Wurzeln aus a in $\mathbf{C}$ gibt. Zeigen Sie weiter: ist $z \in \mathbf{C}$ eine n-te Wurzel, so werden die n-ten Wurzeln aus a durch $\omega_1 z, \ldots, \omega_n z$ gegeben. Machen Sie eine Skizze der n-ten Wurzeln von a.

2. Sei $\sigma\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ gegeben durch $x \mapsto (x, 0, 0)$. Zeigen Sie, daß es keine Multiplikation $*$ auf $\mathbf{R}^3$ geben kann, die $(\mathbf{R}^3, +, *)$ zu einem Körper macht und mit der Vektorraum-Struktur $(\mathbf{R}^3, +, \cdot)$ verträglich ist, d.h.: $x \cdot v = \sigma(x) * v$, für alle $x \in \mathbf{R}$ und alle $v \in \mathbf{R}^3$. (Hinweis: Betrachten Sie für jedes $v \in \mathbf{R}^3$ die $\mathbf{R}$-lineare Abbildung $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, die durch Multiplikation mit v gegeben ist und benutzen Sie, dass ein reelles Polynom dritten Grades eine reelle Nullstelle besitzt.)

3. Berechnen Sie die Wirtinger-Ableitungen der folgenden Funktionen auf $\mathbf{C}$ und bestimmen Sie, wo diese komplex differenzierbar sind:

$$f_1(z) = \bar{z}, \qquad f_2(z) = |z|^2, \qquad f_3(z) = \mathrm{Re}(z), \qquad f_4(z) = 2z^2\bar{z} - z\bar{z}^2.$$

4. Sei $G \subseteq \mathbf{C}$ ein Gebiet. Der *Laplace-Operator* $\triangle$ operiert auf einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $u\colon G \to \mathbf{R}$ durch $\triangle u := (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})(u)$. Es heißt f *harmonisch*, wenn $\triangle u = 0$ ist. Zeigen Sie:

   (a) Ist $f\colon G \to \mathbf{C}$ holomorph, so sind $u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$ harmonisch.

   (b) Ist $f\colon G \to \mathbf{C}^*$ holomorph, so ist auch $\ln|f|$ harmonisch.

Abgabe: Dienstag, 22. April 2008, 11.00 Uhr