Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2008
22.04.2008
Blatt 02

Übungen zu „Mathematik IV für Physiker“

1. (a) Integrieren Sie die Funktion $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $z \mapsto z^2$ über den Weg $[0, 2\pi] \to \mathbf{C}$, $t \mapsto 1 + e^{it}$.

   (b) Parametrisieren Sie die geradlinige Verbindungsstrecke zwischen $-1 \in \mathbf{C}$ nach $1 \in \mathbf{C}$ mit einem Weg γ_1 und sei γ_2 der Weg $[0, \pi] \to \mathbf{C}$, $t \mapsto e^{i(\pi - t)}$ von -1 nach 1. Integrieren Sie nun die Funktion $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $z \mapsto |z|$ über die Wege γ_1 und γ_2.

2. Berechnen Sie $\int_\gamma dz/(1 + z^2)$ für $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbf{C} \setminus \{\pm i\}$, $t \mapsto i + e^{it}$ (Hinweis: Partialbruchzerlegung und überlegen Sie, warum $\int_\gamma dz/(z + i) = 0$ sein muss).

3. Sei $\log\colon G_0 \to \mathbf{C}$, $G_0 = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_0^-$, der Hauptzweig des Logarithmus.

   (a) Ist $z \in G_0$ mit $z = re^{i\varphi}$ ($r > 0$ und $\varphi \in (-\pi, \pi)$), so zeige, dass

   $$\log(z) = \ln(r) + i\varphi$$

   ist. (Hinweis: Sei γ_1 der geradlinige Weg von 1 nach r und γ_2 der Kreisweg von r nach z. Berechne $\int_{\gamma_1 * \gamma_2} d\zeta/\zeta$.)

   (b) Sei $G \subseteq \mathbf{C}$ ein Gebiet. Eine holomorphe Funktion $f\colon G \to \mathbf{C}$ heißt *Zweig des Logarithmus*, wenn für alle $z \in G$ gilt: $\exp \circ f(z) = z$. Man zeige: log ist ein Zweig des Logarithmus und ist $f\colon G_0 \to \mathbf{C}$ ein beliebiger Zweig, so existiert ein $k \in \mathbf{Z}$, so dass für alle $z \in G_0$ gilt: $f(z) = \log(z) + 2\pi ik$. (Hinweis: Für diese Aufgabe benutze man, das die komplexe Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ holomorph ist mit $\exp' = \exp$ und die Funktionalgleichung $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$, für alle $z, w \in \mathbf{C}$, erfüllt.)

   (c) Zeigen Sie, dass nicht für alle $z, w \in G_0$ mit $z, w \in G_0$ gilt:

   $$\log(zw) = \log(z) + \log(w).$$

   Für welche $z, w \in G_0$ gilt diese Formel?

Abgabe: Dienstag, 29. April 2008, 11.00 Uhr