Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2008
29.04.2008
Blatt 03

Übungen zu „Mathematik IV für Physiker“

1. Seien G_1 und G_2 die Definitionsgebiete der Hauptzweige des Logarithmus log bzw. des Arcustangens Arctan.

   (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathbf{C} \setminus \{-i\} \to \mathbf{C}$, $z \mapsto \frac{1+iz}{1-iz}$, das Gebiet G_2 diffeomorph auf G_1 abbildet. (Hint: Bestimmen Sie die Umkehrfunktion.)

   (b) Zeigen Sie für alle $z \in G_2$:
   $$\operatorname{Arctan}(z) = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right).$$
   (Hint: Beide Seiten ableiten.)

2. Sei $G \subseteq \mathbf{C}$ ein Gebiet. Eine holomorphe Funktion $f\colon G \to \mathbf{C}$ heißt *Zweig der Quadratwurzel*, wenn für alle $z \in G$ gilt: $f(z)^2 = z$.

   (a) Man zeige, dass es auf $G_0 := \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_0^-$ genau zwei Zweige der Quadratwurzel gibt, nämlich
   $$f_1(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\log(z)\right), \quad f_2(z) = -f_1(z).$$
   (Wir nennen $\sqrt{\cdot} := f_1\colon G_0 \to \mathbf{C}$ den *Hauptzweig*.)

   (b) Man zeige, dass nicht für alle $z, w \in G_0$ mit $zw \in G_0$ gilt:
   $$\sqrt{zw} = \sqrt{z}\sqrt{w}.$$

   c) Man zeige, dass es keine holomorphe (nicht mal eine stetige) Funktion $f\colon \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}$ geben kann mit $f(z)^2 = z$, für alle $z \in \mathbf{C}^*$.

3. Sei $a \in \mathbf{C}$ beliebig, $G \subseteq \mathbf{C}^*$ ein Gebiet und $\log\colon G \to \mathbf{C}$ ein Zweig des Logarithmus. Man definiert den zugehörigen *Zweig der a-ten Potenz* durch $\operatorname{pot}_a\colon G \to \mathbf{C}$, $z \mapsto \exp(a \log(z)) =: z^a$.

   (a) Berechnen Sie alle möglichen Werte von i^i, 2^{-i} und $(-1)^{\sqrt{i}}$.

   (b) Zeigen Sie: Ist $a = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbf{N}$), $G \subseteq \mathbf{C}^*$, $\log\colon G \to \mathbf{C}$ ein Zweig des Logarithmus und $f\colon G \to \mathbf{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(z)^n = z$ für alle $z \in G$ (ein *Zweig der n-ten Wurzel*), so existiert eine n-te Einheitswurzel ω, so daß $f(z) = \omega \exp(\frac{1}{n} \log z)$ für jedes $z \in G$ ist.

Abgabe: Dienstag, 6. Mai 2008, 11.00 Uhr