Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2008
05.05.2008
Blatt 04

Übungen zu „Mathematik IV für Physiker“

1. Berechnen Sie mit Hilfe von Cauchys Integralformel:

$$\int_{|z+2i|=3} \frac{e^z\,dz}{z^2+\pi^2}, \quad \int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z^2-1)(z-1)^2}$$

2. (a) Zeigen Sie, daß für alle $z \in \mathbf{C}$ (nicht nur in $\mathbf{R}$) gilt:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

   (b) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) alle (komplexen) Nullstellen von cos und sin.

   (c) Zeigen Sie: $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, für alle $z \in \mathbf{C}$.

   (Hinweis: Funktionalgleichung der Exponentialfunktion darf benutzt werden.)

3. Sei $G = \{z \in \mathbf{C} : z \neq (k+\frac{1}{2})\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$ und $\tan\colon G \to \mathbf{C}$ definiert durch $\tan z = \sin z / \cos z$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\tan z = \frac{1}{i}\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$ ist, für alle $z \in G$.

   (b) Sei $G_0 := \{z \in \mathbf{C} : |\mathrm{Re}(z)| < \frac{\pi}{2}$ und G_2 das Definitionsgebiet des Hauptzweiges des Arcustangens'. Zeigen Sie, dass tan das Gebiet G_0 biholomorph auf G_2 abbildet und es gilt:

$$(\tan|G_0)^{-1} = \mathrm{Arctan}.$$

   (Hinweis: Ist G_1 das Definitionsgebiet des Hauptzweiges des Logarithmus', so zeige man, dass die Funktion $z \mapsto e^{2iz}$ das Gebiet G_0 biholomorph nach G_1 abbildet. Benutzen Sie dann Aufgabe 1, Blatt 03.)

4. Sei $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ holomorph und es gebe Konstanten $M, R > 0$ sowie ein $n \in \mathbf{N}$ derart, dass $|f(z)| \leq M|z|^n$ ist für alle z mit $|z| > R$. Zeigen Sie, dass dann f bereits eine Polynomfunktion vom Grade kleiner oder gleich n ist. (Hinweis: Benutzen Sie Cauchys Ungleichung.)

Abgabe: Dienstag, 20. Mai 2008, 11.00 Uhr