Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2008
20.05.2008
Blatt 05

Übungen zu „Mathematik IV für Physiker“

1. (a) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine Reihe komplexer Zahlen (mit $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbf{N}_0$) und $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} \leq \theta$, mit einem $\theta \in (0,1)$, für alle $n \in \mathbf{N}_0$. Zeigen Sie, dass $\sum_0^{\infty} b_n$ absolut konvergent ist. (Quotientenkriterium)

   (b) Sei $P = \sum_0^{\infty} a_n X^n \in \mathbf{C}[[X]]$ (mit $a_n \neq 0$, für alle $n \in \mathbf{N}_0$) und $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R \in [0,\infty]$. Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius von P gleich R ist.

2. Berechnen Sie die Konvergenzradien der Taylorreihen im Nullpunkt von exp, cos, sin, Arctan und $z \mapsto \log(1+z)$.

3. Sei $P \in \mathbf{C}[[X]]$ gegeben durch
$$P = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} X^n .$$
   (a) Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius von P gleich 1 ist.

   (b) Zeigen Sie, dass $P(z)$ für alle $z \in \mathbf{C}$ mit $|z| = 1$ konvergiert.

   (c) Zeigen Sie, dass es $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ mit $|z_1| = |z_2| = 1$ gibt, so dass die formale Ableitung P' von P in z_1 konvergiert, in z_2 aber nicht.

4. Die hyperbolischen Funktionen auf $\mathbf{C}$ werden definiert durch
$$\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}).$$
   (a) Zeigen Sie für alle $z \in \mathbf{C}$: $\sinh z = -i \sin(iz)$, $\cosh z = \cos(iz)$.

   (b) Formulieren und beweisen Sie die Additionstheoreme für sin, cos, sinh und cosh.

   (c) Zeigen Sie nun, dass für alle $x + iy \in \mathbf{C}$ gilt:
$$\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,$$
$$\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

Abgabe: Dienstag, 27. Mai 2008, 11.00 Uhr