Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2008
27.05.2008
Blatt 06

Übungen zu „Mathematik IV für Physiker“

1. (a) Sei $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ eine ganze Funktion und $P \in \mathbf{C}[[X]]$ die Taylorreihe von f in 0. Begründen Sie, warum P den Konvergenzradius ∞ hat und für alle $z \in \mathbf{C}$ gilt: $f(z) = P(z)$.

   (b) Sei $G \subseteq \mathbf{C}^*$ eine Gebiet und $f\colon G \to \mathbf{C}$ ein Zweig der Quadratwurzel. Sei weiter $p \in G$ und $P \in \mathbf{C}[[X]]$ die Taylorreihe von f in p. Begründen Sie, warum der Konvergenzradius von P gleich $|p|$ sein muss.

2. Sei $G \subseteq \mathbf{C}$ ein Gebiet und $p \in G$. Zeigen Sie: Ist $f\colon G \to \mathbf{C}$ holomorph mit $f^{(k)}(p) = 0$ für alle $k \geq 1$, so ist f bereits konstant.

3. Sei $I \subseteq \mathbf{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion. Zeigen Sie: f ist reell-analytisch genau dann, wenn es ein Gebiet $G \subseteq \mathbf{C}$ mit $I \subseteq G$ gibt und eine holomorphe Funktion $\hat{f}\colon G \to \mathbf{C}$ mit $\hat{f}|I = f$.

4. (a) Seien $P = \sum a_n X^n$ und $Q = \sum b_n X^n$ konvergente Potenzreihen mit Konvergenzradien $R_P, R_Q > 0$. Zeigen Sie, dass dann auch das formale Produkt $PQ = \sum_n (\sum_{k+l=n} a_k b_l) X^n$ konvergent sein muss und mindestens Konvergenzradius $\min\{R_P, R_Q\}$ hat.

   (b) Zeigen Sie, dass die Einheiten im formalen Potenzreihenring $\mathbf{C}[[X]]$ genau aus den $P = \sum a_n X^n$ mit $a_0 \neq 0$ bestehen. Geben Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten von P^{-1} an. (Für einen Ring R bestehen die Einheiten $R^* \subseteq R$ aus den invertierbaren Elementen.)

   (c) Zeigen Sie: Hat $P \in \mathbf{C}[[X]]^*$ positiven Konvergenzradius, so auch P^{-1}.

Abgabe: Dienstag, 3. Juni 2008, 11.00 Uhr