Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2008
03.06.2008
Blatt 07

Übungen zu „Mathematik IV für Physiker“

1. Sei $G \subseteq \mathbf{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbf{C}$ eine holomorphe Funktion, deren Werte sämtlich reell sind. Zeigen Sie, dass f bereits konstant sein muss.

2. Beweisen Sie den Umkehrsatz für reell-analytische Funktionen: Ist $\tilde{I} \subseteq \mathbf{R}$ ein offenes Intervall, $p \in \tilde{I}$ und $f\colon \tilde{I} \to \mathbf{R}$ reell-analytisch mit $f'(p) \neq 0$, so gibt es Umgebungen $I \subseteq \tilde{I}$ von p und $J \subseteq \mathbf{R}$ von $f(p)$, so dass $f(I) = J$ ist, und eine reell-analytische Funktion $g\colon J \to I$ mit $g \circ f|I = \mathrm{id}_I$ und $f|I \circ g = \mathrm{id}_J$. (Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3, Blatt 06 und den Umkehrsatz für holomorphe Funktionen.)

3. Sei $G \subseteq \mathbf{C}$ ein Gebiet und $u\colon G \to \mathbf{R}$ harmonisch (vgl. Aufgabe 4, Blatt 01). Sei dann weiter $g\colon G \to \mathbf{C}$,
$$g(z) := \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z).$$
   (a) Zeigen Sie, dass g holomorph ist.
   (b) Sei nun G sternförmig. Zeigen Sie, dass es dann eine holomorphe Funktion $f\colon G \to \mathbf{C}$ gibt mit $\mathrm{Re}(f) = u$. (Hinweis: Vgl. auch Aufgabe 4, Blatt 01; man nehme eine (geeignete) Stammfunktion von g.)

4. Sei $G \subseteq \mathbf{C}$ ein Gebiet und $u\colon G \to \mathbf{R}$ harmonisch. Zeigen Sie, dass u *die Mittelwerteigenschaft* hat, d.h.: Ist $p \in G$ und $r > 0$ derart, dass $\overline{B_r(p)} \subseteq G$ ist, so gilt:
$$u(p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(p + reit)\,dt.$$
(Hinweis: Aufgabe 3 und Cauchys Integralformel)

Abgabe: Dienstag, 10. Juni 2008, 11.00 Uhr