Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2008
10.06.2008
Blatt 08

Übungen zu „Mathematik IV für Physiker“

1. Bestimmen Sie die Singularitäten der folgenden Funktionen und dann, welcher Art sie sind:
$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}, \qquad g(z) = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{z}}.$$

2. Zeigen Sie, dass das Bild einer nicht-konstanten, ganzen Funktion f stets dicht in $\mathbf{C}$ liegt. (Hinweis: Man betrachte die Funktion $g\colon \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}$, $z \mapsto f(1/z)$.)

3. (a) Seien f und g holomorph auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbf{C}$ und sei $p \in G$. Weiter sei $g(p) = 0$, aber $g'(p) \neq 0$. Zeigen Sie, daß für $h(z) := f(z)/g(z)$ gilt: $\mathrm{Res}_p h = f(p)/g'(p)$.
   (b) Bestimmen Sie die Singularitäten der folgenden Funktionen und dort ihre Residuen:
$$h_1(z) = \frac{1}{z(z-\pi)^2}, \qquad h_2(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$$

4. Sei $G \subseteq \mathbf{C}$ ein Gebiet, $f, g\colon G \to \mathbf{C}$ holomprphe Funktionen und $n \in \mathbf{N}$. Sei weiter $p \in G$ eine n-fache Nullstelle sowohl von f als auch von g (und g ohne weitere Nullstellen auf G.) Zeigen Sie, dass die Funktion $h\colon G \setminus \{p\} \to \mathbf{C}$, $h(z) := f(z)/g(z)$ eine hebbare Singularität in p hat und diese sich mit $h(p) := f^{(n)}(p)/g^{(n)}(p)$ heben lässt.

Abgabe: Dienstag, 17. Juni 2008, 11.00 Uhr