Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2008
17.06.2008
Blatt 09

Übungen zu „Mathematik IV für Physiker“

1. Zeigen Sie, dass der Cauchysche Integralsatz, die Cauchysche Integralformel und auch die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel Spezialfälle des Residuensatzes sind.

2. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^4}, \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{x}$$

3. Sei λ das Borel-Lebesguesche Maß auf der Borel-Algebra von $\mathbf{R}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig (klein). Geben Sie eine offene Menge $U \subseteq \mathbf{R}$ an, die $\mathbf{N}$ enthält und deren Maß $\lambda(U)$ kleiner als ε ist. Können Sie das auch für $\mathbf{Q}$ an Stelle von $\mathbf{N}$?

4. Sei $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ die Borelalgebra und $\lambda\colon \mathcal{B} \to [0,\infty]$ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathcal{B}$. Sei weiter $H = \{x \in \mathbf{R}^n : x_n = 0\}$. Zeigen Sie, dass H eine Borelsche Nullmenge ist, d. h.: $H \in \mathcal{B}$ und $\lambda(H) = 0$. (Hinweis: Sei $\varepsilon > 0$. Überdecken Sie H nun so sparsam mit Quadern Q_k $(k \in \mathbf{N})$, dass $\sum_k \lambda(Q_k) \leq \varepsilon$ ist.)

Abgabe: Dienstag, 24. Juni 2008, 11.00 Uhr