Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2008
24.06.2008
Blatt 10

Übungen zu „Mathematik IV für Physiker“

1. (a) Sei $K \subseteq \mathbf{R}^3$ ein Kreiskegel mit einer Grundscheibe vom Radius $r > 0$ und einer Höhe $h > 0$. Berechnen Sie mit Cavalieris Prinzip das Volumen von K.
   (b) Sei $f\colon [a,b] \to (0,\infty)$, $x \mapsto f(x)$ eine stetige Funktion und $K \subseteq \mathbf{R}^3$ der Rotationskörper, der entsteht, wenn man den Graphen von f um die x-Achse rotiert. Zeigen Sie, dass für das Borel-Lebesgue-Maß λ von K gilt:
   $$\lambda(K) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

2. *Der Schwerpunkt* $S = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbf{R}^3$ eines (kompakten) Körpers $K \subseteq \mathbf{R}^3$ ist definiert durch
   $$s_j = \frac{1}{\lambda(K)} \int_K x_j \, dx$$
   ($j = 1, 2, 3$), wo $\lambda(K)$ das Volumen von K bezeichnet. Berechnen Sie den Schwerpunkt der Halbkugel $\mathcal{B}^+ = \{x \in \mathcal{B}^3 : x_3 \geq 0\}$.

3. Sei $G = (0,1) \times (0,\pi) \times (0, 2\pi) \subseteq \mathbf{R}^3$ und $\Phi\colon G \to \mathbf{R}^3$ gegeben durch
   $$\Phi(r, \theta, \varphi) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r\cos\theta).$$
   (a) Berechnen Sie die Jacobische $J_\Phi\colon G \to (0,\infty)$ und zeigen Sie, dass Φ ein Diffeomorphismus von G auf sein Bild $D := \Phi(G)$ ist.
   (b) Berechnen Sie nun mit Hilfe der Transformationsformel das Volumen der Kugelschale ($0 \leq r \leq R \leq 1$)
   $$A = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid r \leq |x| \leq R\}.$$

4. Die *Cantormenge* $C \subseteq [0,1]$ entsteht iterativ so: Im ersten Schritt nimmt man aus $C_0 := [0,1]$ das mittlere Drittel heraus, $C_1 := C_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Im zweiten Schritt nimmt man aus den verbleibenden zwei Intervallen $[0, \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$ wiederum das jeweils mittlere Drittel heraus, $C_2 := [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Bei jedem weiteren Schritt nimmt man aus den verbleibenden Intervallen jeweils wieder das mittlere Drittel heraus und erhält im n-ten Schritt C_n. Schließlich setzt man $C := \bigcap_{n \in \mathbf{N}} C_n$.
   (a) Man zeige, dass C eine Borelmenge und $\lambda(C) = 0$ ist.
   (b) Man zeige, dass C überabzählbar ist. (Hinweis: Man beschreibe alle Zahlen in $[0,1]$ im triadischen System.)

Abgabe: Dienstag, 1. Juli 2008, 11.00 Uhr