Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2008
01.07.2008
Blatt 11

Übungen zu „Mathematik IV für Physiker“

1. Sei $\Delta = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Berechnen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten die folgenden Integrale:
$$I = \int_\Delta e^{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy, \qquad J = \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt.$$
(Hinweis: $(2J)^2 = \int_{\mathbf{R}^2} \exp(-x^2 - y^2)\, dxdy$)

2. Seien $u, v \in \mathbf{R}^3$ und $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ die lineare Abbildung mit $Te_1 = u$ und $Te_2 = v$, wo (e_1, e_2) die kanonische Basis von $\mathbf{R}^2$ ist. Sei $\times\colon \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ das Kreuzprodukt auf $\mathbf{R}^3$. Zeigen Sie:
$$\det(T^*T) = \|u \times v\|^2$$

3. Sei $G \subseteq \mathbf{R}^k$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbf{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Es sei
$$\Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R} :\ y = f(x)\}$$
der Graph von f. Zeigen Sie, dass $\varphi\colon G \to \Gamma_f \subseteq \mathbf{R}^{k+1}$, $\varphi(x) = (x, f(x))$ eine regulär parametrisierte Fläche ist und zeigen Sie, dass für ihre Jacobische J_φ gilt:
$$J_\varphi = \sqrt{1 + |\mathrm{grad}(f)|^2}.$$

4. Sei $f\colon [a,b] \to (0,\infty)$ eine stetig differenzierbare Funktion und $M \subseteq \mathbf{R}^3$ der Rotationskörper, der entsteht, wenn man den Graphen $\Gamma_f \subseteq \mathbf{R}^2$ um die x-Achse dreht. Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt A von M gilt:
$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Abgabe: Dienstag, 8. Juli 2008, 11.00 Uhr